

Всероссийская молодежная  
научная конференция  
студентов, аспирантов и  
молодых ученых  
«Все грани математики и  
механики»

(23–27 апреля 2019 г.)

Сборник тезисов докладов

*(Тезисы представлены в авторской редакции)*

**СЕКЦИЯ  
АЛГЕБРА**

# Вполне идемпотентные эндоморфизмы абелевых групп

Баханова Ю. П., Чехлов А. Р.

Томский государственный университет, Томск

e-mail: j.lie.bak@gmail.ru

В данной работе через  $\text{Hom}(A, B)$  будем обозначать множество всех гомоморфизмов абелевых групп из  $A$  в  $B$ .

Пусть  $f \in \text{Hom}(B, A)$ . Введем следующие обозначения

$H_r(f) := \{\sum_i g_i f s_i \mid g_i \in \text{Hom}(B, A) s_i \in \text{Hom}(A, A) \text{ для каждого } i\}$ ,

$H_l(f) := \{\sum_i s_i f g_i \mid g_i \in \text{Hom}(B, A) s_i \in \text{Hom}(B, B) \text{ для каждого } i\}$ .

Легко убедиться, что если  $f \in \text{Hom}(B, C)$  и  $g \in \text{Hom}(A, B)$ , то

$H_r(fg) \subset H_r(g)$ .

Назовем  $\text{Hom}(A, B)$  вполне идемпотентным справа (слева), если для каждого гомоморфизма  $f \in \text{Hom}(A, B)$  выполнено условие  $f \in fH_r(f)$  ( $f \in H_l(f)f$ ). Множество  $\text{Hom}(A, B)$  называется вполне идемпотентным, если в  $f \in \text{Hom}(B, B)fH_r(f)$  для каждого  $f \in \text{Hom}(A, B)$ .

**Теорема 1.** [1] Пусть  $A = A_1 \oplus \dots \oplus A_n$  и  $B = B_1 \oplus \dots \oplus B_m$ . Тогда следующие условия равносильны:

- 1)  $\text{Hom}(A, B)$  вполне идемпотентно (вполне идемпотентно справа, вполне идемпотентно слева);
- 2) для каждого  $1 \leq i \leq n$  и для каждого  $1 \leq j \leq m$   $\text{Hom}(A_i, B_j)$  вполне идемпотентно (соответственно вполне идемпотентно справа, вполне идемпотентно слева).

## Список литературы

[1] Абызов А.Н., Туганбаев А.А. Гомоморфизмы, близкие к регулярным, и их приложения // *Фундаментальная и прикладная математика*. 2010. 16(7):3-38

# Кольца формальных матриц

Бобылев И.В., Крылов П.А.

Томский государственный университет, г. Томск.

e-mail: [ilyabobylev@bk.ru](mailto:ilyabobylev@bk.ru)

Определим кольцо формальных матриц (см.[1]). Пусть даны два кольца  $R$  и  $S$ ,  $R$ - $S$ -бимодуль  $M$  и  $S$ - $R$ -бимодуль  $N$ . Через  $K$  обозначим множество всех матриц  $\begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix}$ , где  $r \in R, s \in S, m \in M, n \in N$ . Множество  $K$  является абелевой группой относительно обычного сложения матриц. Чтобы  $K$  превратить в кольцо, нужно уметь вычислять произведения  $mn \in R$  и  $nm \in S$ .

Предположим, что даны бимодульные гомоморфизмы  $\varphi: M \otimes_S N \rightarrow R$  и  $\omega: N \otimes_R M \rightarrow S$ . Полагаем  $\varphi(m \otimes n) = mn$  и  $\omega(n \otimes m) = nm$  для всех  $m \in M, n \in N$ . Теперь матрицы  $K$  можно умножать следующим образом:

$$\begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 & m_1 \\ n_1 & s_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rr_1 & rn_1 & rm_1 & ms_1 \\ nr_1 & sn_1 & nm_1 & ss_1 \end{pmatrix},$$

$r, r_1 \in R, s, s_1 \in S, m, m_1 \in M, n, n_1 \in N,$

где  $rm_1, ms_1, nr_1, sn_1$  - это соответствующие модульные произведения. Пусть также для всех  $m, m' \in M$  и  $n, n' \in N$  выполнены равенства ассоциативности  $(mn)m' = m(nm')$ .

Тогда относительно указанных операций сложения и умножения  $K$  является кольцом. Если, наоборот,  $K$  - кольцо, то выполнены указанные соотношения ассоциативности. Кольцо  $K$  называется кольцом формальных матриц и обозначается через  $\begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}$ .

## Список литературы

[1] П. А. Крылов, А. А. Туганбаев. Фундаментальная и прикладная математика. №8 том 15 (2009), С. 145-211.

# Сильно инвариантные подгруппы абелевых групп

Бородина Ю. А., Чехлов А. Р.

Томский Государственный Университет, Томск

e-mail: borodyle4ka97@gmail.com

**Определение 1.** Подгруппа  $H$  группы  $G$  называется вполне инвариантной (сокращенно  $\text{fi}$ -подгруппой, обозначение  $H \leq \text{fi } G$ ), если  $\varphi H \subseteq H$  для всякого  $\varphi$  из кольца эндоморфизмов  $E(G)$  группы  $G$ .

**Определение 2.** Подгруппа  $N$  группы  $G$  называется сильно инвариантной (сокращенно  $\text{si}$ -подгруппой, обозначение  $N \leq \text{si } G$ ), Если  $fN \subseteq N$  для всякого гомоморфизма  $f : N \rightarrow G$ .

**Определение 3.** Подгруппа  $H$  группы  $G$  называется чистой, если  $H \cap nG = nH$  для любого натурального числа  $n$ .

**Теорема 1.**

- (1) Делимые группы без кручения  $\text{si}$ -простые.
- (2) Единственными  $\text{si}$ -подгруппами делимой  $p$ -группы  $G$  являются подгруппы  $G[p^n]$  для положительных целых чисел  $n$ .
- (3)  $\text{Si}$ -подгруппами делимой группы являются сама  $G$  и  $\text{si}$ -подгруппы ее периодической части  $T(G)$ , т.е прямые суммы  $G[p^n]$  для разных простых чисел  $p$  и натуральных чисел  $n$ .

**Теорема 2.** Если подгруппа  $G^*(t) = \{a \in G \mid t(a) > t\}$  чиста, то она является  $\text{si}$ -подгруппой.

**Теорема 3.**

- (1) Всякая смешанная группа не является вполне инвариантно простой.
- (2)  $p$ -группа является вполне инвариантно простой тогда и только тогда, когда она элементарна.
- (3) Группа  $G$  без кручения вполне инвариантно проста тогда и только тогда, когда она делима

## Список литературы

- [1] .G.Calugareanu //Strongliy invariant subgroups //Glasgow Math. J. 57 (2015) 431–443.

# Критерий сопряженности инволюций для $(2 \times 2)$ -матриц

Гайдак В. А., Тимошенко Е. А.

Томский государственный университет, Томск

e-mail: [gaidakvioletta@gmail.com](mailto:gaidakvioletta@gmail.com), [tea471@mail.tsu.ru](mailto:tea471@mail.tsu.ru)

**Предложение 1.** Все нецентральные инволюции линейной группы

$$GL_2(\mathbf{Z}) = \left\{ A \in \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbf{Z}; ad - bc = \pm 1 \right\}$$

имеют вид  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ , где  $a^2 + bc = 1$ .

**Предложение 2.** Пусть  $A = \begin{pmatrix} a & m \\ np & -a \end{pmatrix}$  – нецентральная инволюция в

$GL_2(\mathbf{Z})$ , где  $a, m, n \in \mathbf{Z}$  и  $p$  – простое число. Если либо оба числа  $m$  и  $n$  четны, либо оба числа  $n$  и  $p$  нечетны, то инволюция  $A$  сопряжена с

инволюцией  $\begin{pmatrix} a & mp \\ n & -a \end{pmatrix}$ .

Для инволюций  $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  и  $I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  справедливы следующие

утверждения:

**Теорема 1.** Инволюция указанного в предложении 1 вида сопряжена с  $J$  тогда и только тогда, когда  $b$  и  $c$  – четные числа.

**Теорема 2.** Инволюция указанного в предложении 1 вида сопряжена с  $I$  тогда и только тогда, когда хотя бы одно из чисел  $b$  и  $c$  является нечетным.

**Следствие.** Всякая нецентральная инволюция линейной группы  $GL_2(\mathbf{Z})$  сопряжена ровно с одной из инволюций  $I$  и  $J$ .

## Список литературы

[1] Курош А. Г. Теория групп. М.: Наука, 1967.

# О стандартных формах $(2 \times 2)$ -матриц

Зонов М. Н., Тимошенко Е. А.

Томский государственный университет, Томск

e-mail: mnzonov@gmail.com

Под  $R$  будем понимать ассоциативное кольцо с единицей.

**Определение 1 [1].** Стандартной формой  $(2 \times 2)$ -матрицы  $A$  над кольцом  $R$  называется запись

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_r & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

удовлетворяющая следующим условиям:

- 1)  $\alpha$  и  $\beta$  обратимы в  $R$ ;
- 2)  $a_2, \dots, a_{r-1}$  необратимы в  $R$  и не равны нулю;
- 3) в случае  $r = 2$  элементы  $a_1$  и  $a_2$  не равны нулю одновременно.

**Определение 2 [1].** Говорят, что кольцо  $R$  обладает единственной стандартной формой, если всякая  $(2 \times 2)$ -матрица над  $R$  имеет не более одной стандартной формы.

**Определение 3 [1].** Говорят, что кольцо  $R$  квазисвободно, если единственной стандартной формой единичной  $(2 \times 2)$ -матрицы над  $R$  является тривиальная запись  $E = E$ .

**Теорема 4.** Если  $R$  – квазисвободное кольцо, то для любых двух ненулевых необратимых элементов  $b$  и  $c$  из  $R$  элемент  $bc - 1$  также является необратимым.

**Следствие 5.** В квазисвободном кольце нет делителей нуля.

**Теорема 6.** а) Подкольцо с единицей кольца  $\mathbb{Q}$  обладает единственной стандартной формой тогда и только тогда, когда оно равно  $\mathbb{Q}$ .

б) Подкольцо с единицей кольца  $\mathbb{Q}$  квазисвободно тогда и только тогда, когда оно равно  $\mathbb{Q}$  или  $\mathbb{Z}$ .

**Предложение 7.** Пусть  $n > 1$ . Следующие условия эквивалентны:

- а)  $n$  – простое число.
- б) Кольцо  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  обладает единственной стандартной формой.
- в) Кольцо  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  квазисвободно.

## Список литературы

[1] Cohn P. M. On the structure of the  $GL_2$  of a ring // Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. 1966. V. 30. P. 5–53.

# Вполне инертные подгруппы абелевых групп

Иванец О. В.

Томский Государственный Университет, Томск

e-mail: ivanetssolessya@gmail.com

**Определение 1.** Пусть  $G$  – группа,  $\varphi: G \rightarrow G$  – эндоморфизм и  $H$  подгруппа в  $G$ ;  $H$  называется -инертной, если  $H \cap \varphi(H)$  имеет конечный индекс в  $\varphi(H)$ . Подгруппа  $H$  группы  $G$  называется вполне инертной, если она  $\varphi$ -инертна для любого эндоморфизма  $\varphi$  группы  $G$ . Говорят, что две подгруппы  $K, H$  группы  $G$  соизмеримы, если обе фактор-группы  $(K + H)/H$  и  $(K + H)/K$  являются конечными.

**Пример 1.** а) Пусть  $G = \mathbb{Q} \oplus R$ , где  $\mathbb{Q}$  – аддитивная группа рациональных чисел (т.е. делимая группа без кручения ранга 1),  $R$  – редуцированная группа без кручения ранга 1,  $0 \neq a \in \mathbb{Q}$  и  $0 \neq b \in R$ . Тогда подгруппа  $H = \langle a \rangle \oplus \langle b \rangle$  является вполне инертной.

б) Пусть  $G = \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}_{p^\infty}$ , где  $\mathbb{Z}_{p^\infty}$  – квазициклическая  $p$ -группа (т.е. делимая  $p$ -группа ранга 1),  $0 \neq a \in \mathbb{Q}$  и  $X$  – нетривиальная подгруппа в  $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ . Тогда подгруппа  $H = \langle a \rangle \oplus X$  является вполне инертной.

в) Пусть  $G = \mathbb{Z}_{p^\infty} \oplus \mathbb{Z}$ , где  $\mathbb{Z}$  – аддитивная группа целых чисел и  $X$  – нетривиальная подгруппа в  $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ . Тогда подгруппа  $H = X \oplus \mathbb{Z}$  является вполне инертной.

г) Пусть  $G = \mathbb{Z}_{p^\infty} \oplus A$ , где группа  $A$  не имеет ненулевых  $p$ -делимых фактор-групп. Тогда подгруппа  $A$  вполне инертна в  $G$ .

**Пример 2.** В группе без кручения  $G$  ранга 1 каждая её подгруппа  $H$  является вполне инертной.

## Список литературы

- [1] Dikranjan D., Salce L., Zanardo P. Fully inert subgroups of free Abelian groups // Period. Math. Hungar, 69:1, 2014, 69-78.
- [2] Чехлов А.Р. Вполне инертные подгруппы вполне разложимых групп конечного ранга и их соизмеримость // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика., 2016, № 3(41), С. 42 – 50.

# Кольца формальных матриц со свойством инволюции

Кирова В.О., Крылов П.А.

ТГУ, Томск

emily.bla@yandex.ru

Пусть  $R$  – ассоциативное кольцо с единицей.

**Определение 1.** Элемент  $v \in R$  называется *обратимым*, если в  $R$  существует такой элемент  $x$ , что  $vx = 1 = xv$ . Такой  $x$  называется обратным к  $v$  и обозначается  $v^{-1}$ . Итак,  $vv^{-1} = 1 = v^{-1}v$ . Такой элемент  $v^{-1}$  является единственным для  $v$ .

**Определение 2.** Элемент  $x \in R$  называется  *$k$ -хорошим* (где  $k \geq 2$  – фиксированное число), если можно записать  $x$  в виде суммы  $k$  обратимых элементов кольца  $R$ .

**Определение 3.** Кольцо  $R$  называется  *$k$ -хорошим*, если каждый его элемент является  $k$ -хорошим.

**Определение 4.** Элемент  $v$  называется *инволюцией*, если  $v^2 = 1$ , т.е.  $v$  – обратимый элемент порядка 2.

Определение кольца формальных матриц и основные свойства таких колец содержатся в [1].

**Определение 5.** Пусть  $K = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}$  – кольцо формальных матриц порядка 2.

Говорят, что  $K$  – *кольцо со свойством инволюции*, если каждый элемент  $x \in K$  представим в виде суммы двух обратимых элементов, причем один из них – инволюция:  $x = u + v$ ,  $v^2 = 1$ .

**Теорема 1.** Если  $R$  и  $S$  –  $k$ -хорошие кольца, то  $K$  тоже является  $k$ -хорошим.

**Теорема 2.** Если  $R$  и  $S$  обладают свойством инволюции, то и кольцо  $K$  обладает свойством инволюции.

## Список литературы

[1] Крылов П.А., Туганбаев А.А. Кольца формальных матриц и модули над ними. Москва: МЦНМО, 2017.

[2] Крылов П.А., Туганбаев А.А., Михалев А.В. Связи абелевых групп и их колец эндоморфизмов. Томск: Томский государственный университет, 2002.

# Определяемость циклических групп их группами автоморфизмов

Мальцев А. В., Тимошенко Е. А.

Томский государственный университет, Томск

e-mail: alexmal548@gmail.com

Рассматриваются основные закономерности, позволяющие решать вопрос о том, при каких условиях кольцо вычетов по модулю  $n$  однозначно находится по своей группе обратимых элементов.

**Определение.** Пусть  $n \in \mathbb{N}$ . Мы будем говорить, что кольцо  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  определяется своей группой обратимых элементов  $U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ , если  $U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong U(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$  для всех натуральных  $m \neq n$ .

**Замечание.** Хорошо известно, что группа  $U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$  изоморфна группе автоморфизмов циклической группы  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , т.е. определяемость кольца  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  группой  $U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$  эквивалентна определяемости конечной циклической группы  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  её группой автоморфизмов.

Справедливы следующие факты:

**Предложение 1.** Если кольцо  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  определяется группой  $U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ , то  $n$  делится на 4.

**Лемма 2.** Если  $U(\mathbb{Z}/a_1\mathbb{Z}) \cong U(\mathbb{Z}/a_2\mathbb{Z})$  и для числа  $b$  выполняется  $\text{НОД}(a_1, b) = \text{НОД}(a_2, b) = 1$ , то  $U(\mathbb{Z}/a_1b\mathbb{Z}) \cong U(\mathbb{Z}/a_2b\mathbb{Z})$ .

**Теорема 3 [1].** Если  $U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong U(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$ , то для  $m = \varphi(n)$ , где  $\varphi$  – функция Эйлера, выполняется

$$m < k \leq m \cdot \prod_{p-1|m} \frac{p}{p-1}$$

( $p$  пробегает множество простых чисел таких, что  $p - 1$  делит  $m$ ).

**Теорема 4.** При  $w \geq 2$  кольцо  $\mathbb{Z}/2^w\mathbb{Z}$  определяется своей группой обратимых элементов тогда и только тогда, когда  $2^{w-2} + 1$  является составным числом.

**Теорема 5.** При  $n \leq 150$  кольцо вычетов  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  определяется группой  $U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$  тогда и только тогда, когда  $n \in \{24, 32, 80, 96, 120, 128\}$ .

## Список литературы

[1] Coleman R. Some remarks on Euler's totient function. 2012. URL: <https://arxiv.org/pdf/1207.4446.pdf>

# Кольцо псевдорациональных чисел

Михалькова М. И., Крылов П. А.

Томский государственный университет, Томск

e-mail: milena1999999@gmail.com

В докладе речь пойдет о кольце псевдорациональных чисел. Есть много числовых колец, которые играют важную роль в разных областях математики, имеющие свое строение и свойства. Кольцо псевдорациональных чисел имеет довольно сложное строение. Это объединение  $R$  по всем кольцам  $R_n$ , где  $R_n$  в свою очередь является прямой суммой кольца  $n$ -адических чисел  $\widehat{\mathbb{Z}}_n$  и подкольца поля рациональных чисел  $\mathbb{Q}^{(n)}$ . Элементы кольца  $R$  и называются псевдорациональными числами, они представляются в виде бесконечных векторов. Поэтому очень важно знать строение кольца  $n$ -адических чисел  $\widehat{\mathbb{Z}}_n$ , элементы которого имеют конечное представление. Запишем  $n$  в канонической форме  $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \dots \cdot p_s^{k_s}$ . Тогда используя это можно доказать, что имеет место изоморфизм колец  $\widehat{\mathbb{Z}}_n \cong \widehat{\mathbb{Z}}_{p_1} \oplus \widehat{\mathbb{Z}}_{p_2} \oplus \dots \oplus \widehat{\mathbb{Z}}_{p_s}$  [1]. Поэтому элементы кольца  $R_n = \widehat{\mathbb{Z}}_{p_1} \oplus \widehat{\mathbb{Z}}_{p_2} \oplus \dots \oplus \widehat{\mathbb{Z}}_{p_k} \oplus \mathbb{Q}^{(n)}$  можно представить в виде наборов  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, q)$ , где  $\alpha_i \in \widehat{\mathbb{Z}}_{p_i}, i = 1, 2, \dots, k$  и  $q \in \mathbb{Q}^{(n)}$ [1]. Также приводятся несколько важных теорем и свойств кольца псевдорациональных чисел.

## Список литературы

1. Фомин А.А. Числовые кольца и модули над ними: Учебное пособие. – М.: Прометей, 2013. – 72 с. С.17-31.

# Подгруппы абелевых групп, инвариантные относительно проекций

Радзиевская А.С.

Томский Государственный Университет, Томск

e-mail: [nastya-2050@mail.ru](mailto:nastya-2050@mail.ru)

Пусть  $A$  — абелева группа. Будем использовать следующие обозначения:

$H \leq A \Leftrightarrow H$  — подгруппа в  $A$ ;  $H \leq fiA$  (или  $H$  —  $fi$ -подгруппа в  $A$ )  $\Leftrightarrow H$  — вполне характеристическая подгруппа в  $A$ ;  $H \leq piA$  (или  $H$  —  $pi$ -подгруппа в  $A$ )  $\Leftrightarrow H$  — подгруппа в  $A$ , инвариантная относительно проекций.

Пусть  $B$  и  $C$  — группы,  $X$  — непустое подмножество в  $C$ . Обозначим через

$$\text{Hom}(C, B)X = \sum_{f \in \text{Hom}(C, B)} f(X)$$

подгруппу, порождённую всеми гомоморфными образами подмножества  $X$  в группе  $B$  (гомоморфную оболочку подмножества  $X$  в группе  $B$ ). Всегда  $\text{Hom}(C, B)X \leq fiB$ . Если  $X = C$ , то  $\text{Hom}(C, B)C$  совпадает со следом  $C$  в  $B$ .

**Определение.** Подгруппа  $H \leq A$  называется *инвариантной относительно проекций*, если  $\pi H \subseteq H$  для каждой проекции  $\pi$  группы  $A$ .

**Лемма 1 [1].**

1. Пусть  $\pi, \rho$  — проекции группы  $A$ , причём  $\pi A \leq piA$ . Тогда  $(1-\pi) \rho (1-\pi)$  также является проекцией группы  $A$ .
2. Пусть  $H$  —  $pi$ -подгруппа группы  $A = B \oplus C$ . Тогда  $H \cap B \leq piB$ ,  $H \cap C \leq piC$  и  $\text{Hom}(C, B)(H \cap C) \subseteq H \cap B$ ,  $\text{Hom}(B, C)(H \cap B) \subseteq H \cap C$ .
3. Пусть  $A = B \oplus C$ ,  $B \leq fiA$ ,  $B_1 \leq B$ ,  $C_1 \leq C$  и  $H = B_1 \oplus C_1$ . Тогда  $H \leq piA$ , если и только если  $B_1 \leq piB$ ,  $C_1 \leq piC$ ,  $\text{Hom}(C, B)C_1 \subseteq B_1$

## Список литературы

1. Чехлов А.Р. О подгруппах абелевых групп, инвариантных относительно проекций //Фундамент. и прикл. матем., 2008, том 14, выпуск 6, 211–218

# Об эндоморфизмах $p$ -группы ранга 3

Степанова А. Ю., Тимошенко Е. А.

Томский государственный университет, Томск

e-mail: stepanova.alexa@mail.ru

Пусть  $\mathbf{Z}$  – кольцо целых чисел,  $p$  – простое число,  $m \geq n > 0$ . Для всякого  $x \in \mathbf{Z}$  мы будем писать  $\bar{x} = x + p^m \mathbf{Z}$  и  $\bar{x} = x + p^n \mathbf{Z}$ . Можно показать, что множество  $R$  всех матриц вида

$$A = \begin{pmatrix} \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & \bar{a}_3 \\ \bar{b}_1 & \bar{b}_2 & \bar{b}_3 \\ \bar{c}_1 & \bar{c}_2 & \bar{c}_3 \end{pmatrix} \quad (1)$$

( $a_i, b_i, c_i$  пробегает  $\mathbf{Z}$ ) с поэлементным сложением и умножением

$$\begin{pmatrix} \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & \bar{a}_3 \\ \bar{b}_1 & \bar{b}_2 & \bar{b}_3 \\ \bar{c}_1 & \bar{c}_2 & \bar{c}_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{a}'_1 & \bar{a}'_2 & \bar{a}'_3 \\ \bar{b}'_1 & \bar{b}'_2 & \bar{b}'_3 \\ \bar{c}'_1 & \bar{c}'_2 & \bar{c}'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{a_1 a'_1 + s a_2 b'_1 + s a_3 c'_1} & \overline{a_1 a'_2 + a_2 b'_2 + a_3 c'_2} & \overline{a_1 a'_3 + a_2 b'_3 + a_3 c'_3} \\ \overline{b_1 a'_1 + b_2 b'_1 + b_3 c'_1} & \overline{s b_1 a'_2 + b_2 b'_2 + b_3 c'_2} & \overline{s b_1 a'_3 + b_2 b'_3 + b_3 c'_3} \\ \overline{c_1 a'_1 + c_2 b'_1 + c_3 c'_1} & \overline{s c_1 a'_2 + c_2 b'_2 + c_3 c'_2} & \overline{s c_1 a'_3 + c_2 b'_3 + c_3 c'_3} \end{pmatrix},$$

где  $s = p^{m-n}$ , является кольцом с единицей (изоморфным кольцу эндоморфизмов группы  $\mathbf{Z}/p^m \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/p^n \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/p^n \mathbf{Z}$ ). Символом  $|A|$  мы обозначим элемент кольца  $\mathbf{Z}/p^n \mathbf{Z}$ , равный

$a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + p^{m-n}(a_3 b_1 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_3 b_2 c_1 - a_2 b_1 c_3) + p^n \mathbf{Z}$ ;  
будем называть его *определителем* матрицы (1).

**Теорема.** Пусть  $m > n > 0$ . Для матрицы (1) эквивалентны условия:

- 1) Числа  $a_1$  и  $b_2 c_3 - b_3 c_2$  не делятся на  $p$ .
- 2)  $|A|$  – обратимый элемент в  $\mathbf{Z}/p^n \mathbf{Z}$ .
- 3)  $A$  – обратимый элемент в  $R$ .

Если эти условия выполнены, то матрица  $A^{-1}$  равна

$$\begin{pmatrix} \overline{G(1 - p^{m-n}FM)} & \overline{F(a_3 c_2 - a_2 c_3)} & \overline{F(a_2 b_3 - a_3 b_2)} \\ \overline{F(b_3 c_1 - b_1 c_3)} & \overline{F(a_1 c_3 - p^{m-n} a_3 c_1)} & \overline{F(p^{m-n} a_3 b_1 - a_1 b_3)} \\ \overline{F(b_1 c_2 - b_2 c_1)} & \overline{F(p^{m-n} a_2 c_1 - a_1 c_2)} & \overline{F(a_1 b_2 - p^{m-n} a_2 b_1)} \end{pmatrix},$$

где  $M = a_3 b_1 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_3 b_2 c_1 - a_2 b_1 c_3$ ,  $G + p^m \mathbf{Z} = (a_1 + p^m \mathbf{Z})^{-1}$ ,  
 $F + p^n \mathbf{Z} = |A|^{-1}$ .

## Список литературы

[1] Крылов П.А., Туганбаев А.А. Кольца формальных матриц и модули над ними. М.: МЦНМО, 2017.

# Группы гомоморфизмов абелевых групп

Худякова К.К., Крылов П.А.

Томский государственный университет, г.Томск

[XUDYAKOVA\\_2018@LIST.RU](mailto:XUDYAKOVA_2018@LIST.RU)

Определение. Пусть  $A, B$ - абелевы группы. Отображение  $f: A \rightarrow B$  называется гомоморфизмом, если оно сохраняет групповую структуру:  $\forall a, b \in A$  верно равенство  $f(a + b) = f(a) + f(b)$ .

Приведем некоторые свойства гомоморфизмов.

1)  $f(0) = 0$ ; 2)  $f(x - y) = f(x) - f(y)$ ; 3)  $f(-x) = -f(x)$ .

Проверим эти свойства.

1) Из равенства  $0 + 0 = 0$  выводятся такие равенства  $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0) = f(0) = 0$ .

2) Во-первых, по определению имеем  $x - y = x + (-y)$ , теперь рассмотрим такие равенства:  $f(x - y) = f(x) + f(-y)$ ,  $f(x - y) = f(x + (-y)) = f(x) + f(-y) = f(x) - f(y)$ .

3) Наконец, нужно доказать, что для любого  $x \in A$  элемент  $f(-x)$  противоположен к элементу  $f(x)$ . Имеем такие равенства  $f(x) = f(x - x) = f(0) = 0 = f(-x) = -f(x)$ .

Теперь приведем факт о группах гомоморфизмов.

1) Докажем, что  $\text{Hom}(Z, C) \cong C$  является изоморфизмом. Любой гомоморфизм  $\alpha: Z \rightarrow C$  вполне определяется элементом  $\alpha 1: c \in C$ , причем, очевидно, для каждого элемента  $c \in C$  существует такой гомоморфизм  $\alpha: Z \rightarrow C$ , что  $\alpha 1 = c$ . Так как из  $\alpha 1 = c_1, \beta 1 = c_2 \Rightarrow (\alpha + \beta) 1 = c_1 + c_2 = c_2$ , то соответствие  $\alpha 1 \rightarrow c$ , если  $\alpha 1 = c$ , оказывается естественным изоморфизмом между группой  $\text{Hom}(Z, C)$  и группой  $C$ .

## Список литературы

[1] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, 1974. Т. 1.

СЕКЦИЯ  
**ГЕОМЕТРИЯ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ**

# О полиномиальных интегралах магнитного геодезического потока на двумерном торе

Агапов С.В.

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

Новосибирский государственный университет, Новосибирск

e-mail: agapov@math.nsc.ru

Геодезический поток в магнитном поле на двумерном торе задается гамильтоновой системой

$$\dot{x}^j = \{x^j, H\}_{mg}, \quad \dot{p}_j = \{p_j, H\}_{mg}, \quad H = \frac{1}{2} g^{ij} p_i p_j, \quad i, j = 1, 2.$$

Магнитная скобка Пуассона имеет следующий вид:

$$\{F, H\}_{mg} = \sum_{j=1}^2 \left( \frac{\partial F}{\partial x^j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial F}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial x^j} \right) + w(x^1, x^2) \left( \frac{\partial F}{\partial p_1} \frac{\partial H}{\partial p_2} - \frac{\partial F}{\partial p_2} \frac{\partial H}{\partial p_1} \right).$$

На двумерном торе известен лишь один пример аналитической римановой метрики, геодезический поток которой в непостоянном магнитном поле является вполне интегрируемым на всех уровнях энергии; при этом существует линейный по импульсам первый интеграл. Известны также примеры метрик, магнитный геодезический поток которых обладает квадратичным по импульсам первым интегралом на фиксированном уровне энергии (см. [1], [2]). В докладе будут представлены недавно полученные результаты о существовании полиномиальных первых интегралов степени выше 2 на различных уровнях энергии ([3]).

Доклад основан на совместных работах с М. Бялым, А.А. Валюженичем, А.Е. Мироновым.

## Список литературы

- [1] Dorizzi, B., Grammaticos, B., Ramani, A., Winternitz, P. Integrable Hamiltonian systems with velocity-dependent potentials. // J. Math. Phys. 1985. V. 26. No. 12. P. 3070–3079.
- [2] Agapov S. V., Bialy M., Mironov A. E. Integrable magnetic geodesic flows on 2-torus: new examples via quasi-linear system of PDEs. // Commun. Math. Phys.. 2017. V. 351. No. 3. P. 993–1007.
- [3] Agapov S. V., Valyuzhenich A. A. Polynomial integrals of magnetic geodesic flows on the 2-torus on several energy levels. // <https://arxiv.org/abs/1812.01290>

# On the Gram matrix of hyperbolic tetrahedron<sup>1</sup>

Vuong Huu Bao

Novosibirsk State Universit, Novosibirsk

e-mail: vuonghuubao@live.com

We consider a compact hyperbolic tetrahedron  $T$  given by its edge lengths  $l_1, \dots, l_6$ . Let  $G(T)$  be a Gram matrix of  $T$  in terms of its edge lengths

$$G(T) = \begin{pmatrix} 1 & \cosh l_{34} & \cosh l_{24} & \cosh l_{14} \\ \cosh l_{34} & 1 & \cosh l_{23} & \cosh l_{13} \\ \cosh l_{24} & \cosh l_{23} & 1 & \cosh l_{12} \\ \cosh l_{14} & \cosh l_{13} & \cosh l_{12} & 1 \end{pmatrix}$$

We obtain the following property of  $G(T)$  and express the dihedral angles of  $T$  in terms of its Gram matrix signature.

**Theorem 1.** Let  $T$  be a compact hyperbolic tetrahedron with edge lengths  $l_1, \dots, l_6$ . Then

- (i)  $c_{ii} < 0, i \in 1, 2, 3, 4$
- (ii)  $\cos L_{ij} = \frac{-c_{ij}}{\sqrt{c_{ii}c_{jj}}}$

where  $L_{ij}$  is a dihedral angle at the edge joining vertices  $i$  and  $j$ ,  $c_{ij} = (-1)^{i+j}G_{ij}$  is a cofactor of Gram matrix.

Analogous proposition but in terms of dihedral angles of  $T$  was given in [1].

## References

- [1] Mednykh A.D., Pashkevich M.G. Elementary formulas for a hyperbolic tetrahedron // Siberian Mathematical Journal. 2006. V. 47. No. 4, P. 687 – 695.

---

<sup>1</sup> Работа поддержана грантом Правительства России (договор № 14.Y26.31.0025) и РФФИ (проект № 18-01-00420).

# Объемы прямоугольных гиперболических многогранников<sup>2</sup>

Егоров А. А.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск

e-mail: [a.egorov2@g.nsu.ru](mailto:a.egorov2@g.nsu.ru)

В трехмерном пространстве Лобачевского  $H^3$  рассматриваются прямоугольные гиперболические многогранники двух типов: компактные - со всеми конечными вершинами, идеальные - со всеми вершинами на абсолюте. Остроугольные, в их числе и прямоугольные, многогранники в  $H^3$  однозначно определяются своим комбинаторным типом и двугранными углами. Теоремы Погорелова [1] и Андреева [2] дают необходимые и достаточные условия существования остроугольных многогранников  $H^3$ .

С определенной точностью были вычислены объемы более 40 тысяч компактных и 100 тысяч идеальных многогранников, что существенно обобщает результаты работы [3]. Исследованы корреляции между гиперболическими объемами и комбинаторными инвариантами многогранников. Сформулированы гипотезы о многогранниках с максимальным и минимальным объемом при фиксированном числе граней. Показано, что гипотеза об идеальных многогранниках минимального объема верна, если число граней от 8 до 23.

## Список литературы

- [1] Погорелов А.В. О правильном разбиении пространства Лобачевского, Матем. заметки, 1967, Т. 1 (1), С. 3--8.
- [2] Андреев Е.М. О выпуклых многогранниках в пространствах Лобачевского, Матем. сб., 1970, Т. 81(3), С. 445--478.
- [3] Inoue T. The 825 smallest right-angled hyperbolic polyhedra, arXiv:1512.01761.

---

<sup>2</sup> Работа поддержана грантом Правительства России (договор № 14.У26.31.0025) и РФФИ (проект № 19-01-00569).

# Коэффициент псевдоминимальности для параболоидов

Есипов Д. Е., Бухтяк М. С.

Томский государственный университет, Томск

e-mail: desipov58@gmail.com

В работах [1,2] предложена методика моделирования формы ортотропного упругого материала, основанная на использовании псевдоминимальной поверхности. В данной работе вычисляется безразмерный показатель псевдоминимальности для гиперболического параболоида, параболоида вращения и псевдоминимальной поверхности вращения (в пакете Maple [3]).

Безразмерный показатель псевдоминимальности определится формулой

$$\delta(u, v) = \frac{(2b_{12}g_{12} - g_{11}b_{22} - b_{11}g_{22})^2}{(b_{12}^2 - b_{11}b_{22})(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)} - \frac{(1-L)^2}{L}.$$

Здесь  $g_{11}, g_{12}, g_{22}$  – коэффициенты первой квадратичной формы поверхности  $\Sigma$ , а  $b_{11}, b_{12}, b_{22}$  – коэффициенты второй квадратичной формы. Для указанных поверхностей вычислены значения коэффициента псевдоминимальности, что позволило судить о степени пригодности различных областей таких поверхностей для моделирования формы ортотропного упругого материала (например, металлического сетеполотна, применяемого в орбитальных рефлекторных антеннах в качестве материала отражающей поверхности). Составленная Maple-программа вполне универсальна для любых гладких поверхностей, заданных параметрически.

## Список литературы

- [1] М. С. Бухтяк, “Обобщение минимальных поверхностей и моделирование формы конструкции из ортотропного материала”, Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех., 2017, № 45, С. 5–24.
- [2] М. С. Бухтяк, “Составная поверхность, близкая к псевдоминимальной”, Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех., 2017, № 46, 5–13 .
- [3] Говорухин В.Н., Цибулин В.Г. Введение в Maple. Математический пакет для всех 1997. –213С.

# F - полиномы и связанные суммы виртуальных узлов

Иванов М. Э.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск

e-mail: m.ivanov2@g.nsu.ru

В [1] вводится семейство полиномов

$$F_D^n(t, l) = \sum_{c \in C(D)} \operatorname{sgn}(c) t^{\operatorname{Ind}(c)} l^{\nabla J_n(D_c)} - \sum_{c \in T_n(D)} \operatorname{sgn}(c) l^{\nabla J_n(D_c)} - \sum_{c \notin T_n(D)} \operatorname{sgn}(c) t^{\operatorname{Ind}(c)} l^{\nabla J_n(D)}$$

являющихся инвариантом виртуальных узлов. В данной работе были посчитаны F – полиномы из таблицы Грина [2], а также доказаны некоторые их свойства.

Связная сумма двух диаграмм узлов корректно определена для классических диаграмм узлов. В случае диаграмм виртуальных узлов связная сумма зависит от выбора точек, в которых мы соединяем диаграммы.

**Теорема 1.** Пусть  $M, K$  – ориентированные виртуальные узлы.  $\nabla J_n(M) = 0$ ,  $M'$  - диаграмма узла  $M$ ,  $K_1, K_2$  – диаграммы узла  $K$ , тогда  $F_{M' \# K_1}^n(t, l) = F_{M' \# K_2}^n(t, l)$ , где  $M' \# K_1, M' \# K_2$  – связанные суммы диаграмм.

## Список литературы

- [1] Kirandeep Kaur, Madeti Prabhakar, Andrei Vesnin Two-variable polynomial invariants of virtual knots arising from flat virtual knot invariants arXiv.org. 2018. URL: <https://arxiv.org/pdf/1803.05191.pdf> (дата обращения: 19.02.2019)
- [2] Heather A. Dye An invitation to Knot Theory: Virtual and Classical. CRC Press, 2016. P. 232 – 238.

# Перекрывтия самоподобных фракталов в общем положении <sup>3</sup>

Камалутдинов К. Г.

Новосибирский государственный университет, Новосибирск

e-mail: kirdan15@mail.ru

**Определение 1.** Пусть  $F = \{F_1, \dots, F_m\}$  – система сжимающих подобий в пространстве  $\mathbb{R}^n$ . Непустое компактное множество  $K$  такое, что  $K = F_1(K) \cup \dots \cup F_m(K)$ , называется *самоподобным множеством*, порожденным системой  $F$  или *аттрактором* системы  $F$ . Аттрактор  $K$  существует и единственен для каждой такой непустой системы  $F$  по теореме Хатчинсона [1].

Пользуясь полученной нами теоремой об общем положении для параметризованных семейств фракталов [2] мы доказываем следующее:

**Теорема 1.** Пусть  $F_t = \{F_1, \dots, F_{m-1}, F_m^t(x) = G(x) + t\}$  – система сжимающих подобий в  $\mathbb{R}^n$  с коэффициентами  $p_1, \dots, p_m$ , зависящая от параметра  $t \in \mathbb{R}^n$ . Пусть  $K_t$  – ее аттрактор,  $s$  – решение уравнения  $\sum_{i=1}^m p_i^s = 1$ ,  $\bar{p} = \max\{p_1, \dots, p_m\}$ ,  $k < m$ . Тогда, если  $p_k + p_m + \bar{p} < 1$  и  $s < n/2$ , то  $F_k(K_t) \cap F_m^t(K_t) = \emptyset$  при почти всех  $t \in \mathbb{R}^n$ .

Полученный результат позволяет рассчитывать хаусдорфову размерность аттракторов некоторых параметризованных семейств для почти всех значений параметров. Аналогичные результаты были получены для систем, роль параметров в которых играют коэффициенты подобий.

## Список литературы

[1] Hutchinson J. Fractals and self-similarity // Indiana Univ. Math. J. 1981. V. 30. No. 5, P. 713–747.

[2] Kamalutdinov K. G., Tetenov A. V. Twofold Cantor sets in  $\mathbb{R}$  // Sib. Elektron. Mat. Izv. 2018. V. 15. P. 801–814.

---

<sup>3</sup> Работа поддержана грантом Правительства России (договор № 14.Y26.31.0025) и РФФИ (проекты № 19-01-00569, № 18-501-51021).

**СЕКЦИЯ  
ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ И  
ЭКОЛОГИИ: ФИЗИЧЕСКОЕ И  
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ  
МОДЕЛИРОВАНИЕ**

# Влияние массовой доли и дисперсности порошка алюминия в составе твердого топлива на характеристики зажигания<sup>4</sup>

Абрамова Н.С., Порязов В.А.

Томский государственный университет, г. Томск

e-mail: poryazov@ftf.tsu.ru

Представлены результаты расчета зажигания и выхода на стационарный режим горения металлизированного твердого топлива под действием теплового потока. Исследовано влияние массовой доли и дисперсности частиц металла в составе твердого топлива на характеристики зажигания.

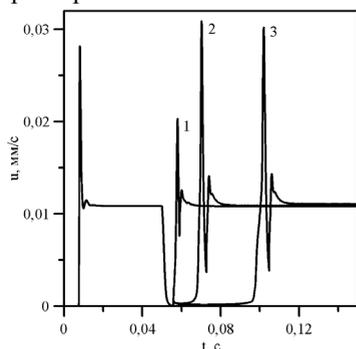


Рис. 1. Зависимость скорости горения пороха Н от времени.

$\alpha_{Al} = 0.09$ ,  $MH \neq 0$

1 -  $r_{Al,0} = 2$  мкм, 2 -  $r_{Al,0} = 15$

мкм, 3 -  $r_{Al,0} = 50$  мкм.

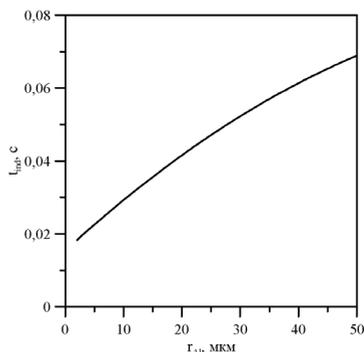


Рис. 2. Зависимость задержки времени зажигания пороха Н от дисперсности частиц алюминия.

$\alpha_{Al} = 0.09$ ,  $MH \neq 0$

Показано, что дисперсность порошка алюминия имеет существенное влияние на характеристики зажигания металлизированных твердых топлив.

## Список литературы

[1] Порязов В. А., Крайнов А. Ю. Математическая модель и расчет нестационарной скорости горения металлизированных твердых

<sup>4</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 18-38-00533 мол\_а.

ракетных топлив // Вестн Том. гос. ун-та. Математика и механика.  
2017. № 50. С. 99–111.

# **Математическое моделирование зажигания лесного горючего материала лучистым тепловым потоком в многоярусном лесном массиве**

**Акчина С.С., Перминов В.А.**

Томский политехнический университет, г. Томск  
e-mail: suri069702@yandex.ru

В результате аварийного повреждения газопровода возможно воспламенение газа с дальнейшим образованием «огненного шара» (ОШ) и зажиганием близлежащего растительного покрова [1]. Вследствие воспламенения лесной растительности возможны лесные пожары.

В данной работе представлена математическая модель зажигания полога леса в результате разрыва газопровода с образованием ОШ. При численном решении учитываются параметры лесного массива (масса топлива, влагосодержание, запас лесного горючего материала) и коэффициент ослабления излучения пологом леса в многоярусном лесном массиве.

Данная модель используется для определения безопасных расстояний от объектов повышенной опасности (ОПО) до лесного массива. Математически данная задача сводится к решению системы дифференциальных уравнений для многофазной многокомпонентной реагирующей среды с начальными и граничными условиями [2].

Решение поставленной задачи позволяет прогнозировать размеры опасных зон термического поражения и как следствие, обосновывать управленческие решения по ликвидации последствий аварии и принятию ряда превентивных мероприятия для их предотвращения.

## **Список литературы**

- [1] СТО Газпром 2-2.3-400-2009 Методика анализа риска для опасных производственных объектов газодобывающих предприятий ОАО «Газпром». – М: Газпром, 2009. – 343 с.
- [2] Гришин А.М., Перминов В.А. О зажигании лесных массивов в результате взрыва Тунгусского метеорита// Физика горения и взрыва. – 1993. – Т.29. – №6. – С.8-14.

# **Движение частицы в форме сплюснутого эллипсоида вращения в зазоре между двумя вращающимися коаксиальными цилиндрами**

**Андропова А. О., Матвиенко О. В.**

Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования «Национальный исследовательский  
Томский государственный университет».

e-mail: a.o.andropova@gmail.com, matvolegv@mail.ru

В металлургической, химической, а также в горно-обогатительной промышленности большое распространение получили гидроциклоны различных конструкций. Устройства предназначены для разделения твердых частиц в потоке жидкости за счет центробежных сил. [1].

При центробежном разделении выбросу придается вращательное движение внутри циклонного аппарата, при этом твердые частицы отбрасываются центробежной силой на периферию аппарата к его стенке, так как центробежное ускорение в циклоне на несколько порядков больше ускорения силы тяжести, что позволяет удалить из выброса даже весьма мелкие частицы. [2]

Отметим, что подавляющее большинство публикаций относится к изучению процессов разделения частиц сферической формы [3]. Однако в реальных ситуациях форма частицы может существенно отличаться от сферической. Целью работы является исследование движения в закрученном потоке неизометрических твердых частиц, имеющих форму сплюснутого эллипсоида вращения.

## **Список литературы**

- [1] Поваров А. И. Гидроциклоны на обогатительных фабриках. – М. : Недра, 1978. – 267 с.
- [2] Матвиенко О.В., Евтюшкин Е.В. Математическое исследование сепарации дисперсной фазы в гидроциклоне при очистке вязкопластических буровых растворов // Инженерно-физический журнал. – 2011. – Т. 84. – № 2. – С. 230–238.
- [3] Матвиенко О.В., Дик И.Г. Численное исследование сепарационных характеристик гидроциклона при различных режимах загрузки твердой фазы // Теоретические основы химической технологии. – 2006. – Т. 40. – № 2. – С. 216–221.

# Влияние ООО "Томскводоканал" на окружающую среду

Антонов М. В., Сечин А. А.

Национальный исследовательский Томский политехнический университет, Томск

e-mail: mva9@tpu.ru

Водопроводно-канализационная система города Томска эксплуатируется организацией «Томскводоканал» начиная с 2011 года. В рамках своей деятельности данная организация осуществляет добычу, подготовку и реализацию питьевой воды, параллельно занимаясь сбором и транспортировкой на очистные сооружения сточных вод. Водозаборным участком является Томь-Обское междуречье.

Более 40 лет эксплуатации данного участка для водозабора привело к образованию депрессионной воронки площадью до 840 км<sup>2</sup> и глубиной до 10 метров [1]

Данный факт обусловил появление нескольких новых проблем: 1) просачивание поверхностных вод, в том числе и загрязненных, в область забора подземных вод; 2) повсеместная деградация водных массивов попавших в границы депрессионной воронки. Так с 1976 на данной территории происходит высыхание колодцев, высохли несколько озер [1].

Можно связать потерю влаги природными пространствами и риск возникновения лесных пожаров. Так, за период наблюдения с 2009 по 2018 год, в общей сложности на участке линии водозабора и воронки депрессии было зафиксировано более 200 очагов пожаров [2].

## Список литературы

[1] Попов В.К., Лукашевич Л.Д., Коробкин В.А., Золотарев В.В., Галямов Ю.Ю., Эколого-экономические аспекты эксплуатации подземных вод Обь-Томского междуречья. Томск: ТГАСУ, 2003. – 173 с.

[2] Карта пожаров [Электронный ресурс]: Космоснимки – мониторинг природных пожаров. – режим доступа: <http://fires.ru/> 10.02.19

# Математическое исследование закрученного течения вязкопластических сред

Асеева А.Е., Матвиенко О.В.

Томский государственный университет, г. Томск

e-mail: alena.aseeva.93@mail.ru

Течение дисперсных систем в большинстве случаев описывается сложной функциональной зависимостью эффективной вязкости как от приложенного напряжения сдвига, так и от градиента скорости. На практике часто встречаются дисперсные системы, обладающие пространственной структурой, которые ведут себя подобно твердым телам вплоть до очень высоких скоростей сдвига. Реологическое поведение таких сред можно описать моделью Балкли – Гершеля, объединяющей в себе свойства модели степенной жидкости Оствальда – де Вейля и вязкопластической среды Шведова – Бингама. [1]

Для описания поля течения использовались двумерные осесимметричные уравнения реодинамики, описывающие баланс массы и количества движения.

Результаты работы. Анализ закрутки на величину эффективной вязкости позволяет сделать вывод, что с ростом значений числа Россби происходит уменьшение значений эффективной вязкости, что связано с ростом скоростей сдвиговых деформаций в потоках с закруткой. Распределение тангенциальной скорости характеризуется максимумом, локализованным в периферийной части потока. В центральной части потока профиль тангенциальной скорости является нелинейным, что свидетельствует о наличии в этой части

потока сдвиговых напряжений  $\tau_{r\varphi}$  при одном и том же числе Россби интенсивность рециркуляции тем больше, чем меньше значения предельного напряжения сдвига  $\sigma$  и консистенции  $k$  и больше значения показателя нелинейности  $n$ .

## Список литературы

1 Кутепов А. М., Полянин Л. Д., Запрянов З. Д., Вязьмин А. В., Казенин Д. А. *Химическая гидродинамика: справочное пособие*. Москва: Бюро Квантум, 1996.

# **Моделирование естественной конвекции жидкости с переменной вязкостью в замкнутой полости при наличии радиаторного элемента и пористой вставки <sup>5</sup>**

**Астанина М. С., Шеремет М. А.**

НИ ТГУ, Томск

e-mail: astanina.marina@bk.ru

Исследование пассивных систем охлаждения различных источников энергии становится очень актуальным последнее время. Развитие приборостроения и энергетики становятся главными причинами к возрастанию спроса на теоретические расчеты в данной области.

В настоящей работе рассматривается задача естественной конвекции жидкости с переменной вязкостью в замкнутой области с источником энергии при наличии радиаторной системы. Также в полость введена пористая вставка над источником тепла. Пористый слой изотропен, проницаем для жидкости. Температура рабочей среды и температура твердого скелета пористого слоя считаются одинаковыми, и при моделировании используется локально-равновесная модель. Управляющие уравнения, описывающие рассматриваемый процесс, построены на основе двумерных нестационарных дифференциальных уравнений в частных производных с использованием безразмерных переменных «функция тока – завихренность – температура» [1].

Анализ результатов проводился по полученным распределениям изолиний функции тока и температуры в полости, отражающим динамику изменения течения в полости, а также по зависимостям интегральных параметров.

## **Список литературы**

[1] Astanina M.S., Sheremet M.A., Umavathi J.C. Transient natural convection with temperature-dependent viscosity in a square partially porous cavity having a heat-generating source // Numerical Heat Transfer, Part A: Applications. 2018. V. 73. No. 12. P. 849 – 862.

# Изучение аэродинамики во вращающихся механических системах. Вихри Тэйлора.

Бразовский Е. Б., Бубенчиков А. М.

НИ ТГУ, Томск

e-mail: E.Brazovskiy@gtt.gazprom.ru

Течение Куэтта-Тэйлора в несжимаемой жидкости и сжимаемом газе имеет большое значение для теоретической, а также для прикладной науки. Данному течению посвящено большое количество статей, содержащих как эксперименты, теоретически анализ, так и результаты численных расчетов. Однако при этом, физическое содержание этого явления остаётся не до конца выясненным, несмотря на возрастающий практический интерес. Целью данной работы является выявление публикаций о вихрях Тэйлора представляющих наибольший интерес с точки зрения изучения аэродинамики во вращающихся механических системах.

В настоящей работе рассматривается задача изучения зависимости интенсивности и количества вихрей, а также их структуры от числа Рейнольдса и поверхностной температуры цилиндров. Также в работе рассматриваются нестандартные подходы к объяснению эффекта вихрей Тэйлора с точки зрения альтернативной физики.

Анализ подхода и объяснения проводились на основании публикаций взятых из источников приведённых в списке литературы. [1], [2], [3], [4].

Ключевые слова: течения Куэтта Тэйлора, влияние сжимаемости, структура течения.

## Список литературы

[1] <http://zaryad.com/forum/threads/vixr-tejlora.2358/>

[2] <https://mash-xxl.info/info/21668/>

[3] <https://ru.wikipedia.org/wiki/%>

[4] В.С.Букреев. Статья «Вихревые образования». На сайт «Perpetuum mobile» текст прислан 31 августа 2010 г.

# **Экспериментальное исследование пожароопасных свойств некоторых видов древесных строительных материалов в результате теплового воздействия при лесных пожарах<sup>6</sup>.**

**Герасимова А.А., Касымов Д.П.**

Томский государственный университет, г. Томск

*E-mail:* [sasha.gerasimova@mail.ru](mailto:sasha.gerasimova@mail.ru)

Природные пожары наносят значительный материальный и экономический ущерб территориям, на которых они возникают. В литературе имеется большое количество экспериментальных работ по исследованию пожарной опасности древесины.

В данной работе оценивалось влияние различных огнезащитных составов при исследовании влияния фронта пожара на поверхность образцов древесных строительных материалов.

Очаг горения, смоделированный лесным горючим материалом, представлял собой площадку по ширине, совпадающей с размером образца древесины. В качестве образцов использовались фанера, ДСП и ОСП плита.

Для определения полей температуры на поверхности исследуемых образцов в результате воздействия модельного лесного пожара использовалась методика применения инфракрасной камеры, представленная в работе [1]. Использование тепловизионной камеры позволяет зафиксировать участки наибольшего и наименьшего нагрева деревянных образцов при воздействии на них очага горения.

Сравнительный анализ показывает, в зависимости от сорта древесины эффективность обработки поверхностными огнезащитными пропитками поверхностей выбранных строительных материалов существенно снижается температура поверхности образцов древесины. Установлено, что наличие огнезащитной пропитки на поверхности материала увеличивает время зажигания образца, но не исключает возможности появления пламени на поверхности.

---

<sup>6</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Гранта Президента РФ № МК – 3885.2018.8 и Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-38-00190мол\_а).

# Использование решеточного метода Больцмана для решения задач естественной конвекции <sup>7</sup>

Гибанов Н.С.

Национальный исследовательский Томский государственный  
университет, Томск

e-mail: gibanov@mail.tsu.ru

В последнее время активно развиваются различные численные методы, позволяющие проводить сложные расчеты. К таким расчетам могут относиться моделирование сложных многокомпонентных сред, течения в пористых средах и с учетом изменяемых фазовых состояний. Одним из таких методов является решеточный метод Больцмана. Преимущества данного метода выражаются в простоте и возможности естественного распараллеливания широко класса задач.

В данной работе проведены тестовые расчеты задач диффузии и конвекции, а также проведено сравнение различных моделей рассматриваемого метода. Кроме того, был проведен сравнительный анализ полученных данных с данными аналогичных задач, решенных на основе методов конечных разностей и контрольного объема.

Суть решеточного метода Больцмана заключается в моделировании следующего уравнения:

$$f_k(x + \Delta x, t + \Delta t) = f_k(x, t)(1 - \omega) + \omega f_k^{eq}(x, t) \quad (4)$$

где  $f_k$  – функции распределения для конкретного направления  $k$  для уравнения движения и энергии,  $f_k^{eq}$  – функции локального равновесного распределения для конкретного направления  $k$ .

## Список литературы

- [1] Mohamad A. A. Lattice Boltzmann Method: Springer-Verlag London, 2011.
- [2] Kruger T., Kusumaatmaja H., Kuzmin A., Shardt O., Silva G. Vigen E.M. The Lattice Boltzmann Method. Springer Int. Publ. Switzerland 2017.

---

<sup>7</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке стипендии Президента СП-1053.2018.1

# Исследование процесса формирования детонационной волны в плоском профилированном канале <sup>8</sup>

Гольдина Н. В.

Томский государственный университет, г. Томск

e-mail: alche0809@mail.ru

В данной работе проведено численное исследование в двумерном приближении процесса формирования детонационной волны в двух плоских профилированных каналах, профиль одного из которых представляет собой кусочно-параболическую форму, а другой – форму чередующихся ступенек, заполненных стехиометрической пропано-воздушной смесью [1, 2].

Расчеты проводились в пакете программ ANSYS Fluent 14.0, с использованием метода конечных объемов, где потоки на границах ячеек определялись по методу Роу. Аппроксимация конвективных слагаемых в уравнениях проводилась со вторым порядком точности. Ячейки разностной сетки, представляющие собой нерегулярные четырехугольники, имели средний размер 7 мм.

Показано, что в канале с кусочно-параболическим профилем детонационная волна формируется после пятого препятствия, в то время как в канале с кусочно-ступенчатым профилем этого не происходит.

## Список литературы

- [1] Фролов С. М. Быстрый переход горения в детонацию // Доклады академии наук. 2008. Т. 27. №6. С. 32 – 46.
- [2] Фролов С. М., Семенов И. В., Комиссаров П. В., Уткин П. С., Марков В. В. Сокращение длины и времени перехода горения в детонацию в трубе с профилированными регулярными препятствиями // Доклады академии наук. 2007. Т. 415. №4. С. 1 – 5.

---

<sup>8</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания № 9.9625.2017/8.9.

# Проницаемость углеродной структуры, составленной закрытыми нанотрубками

Бубенчиков А. М., Демиденко И. С.

Томский государственный университет, г. Томск

e-mail: mor.lol@yandex.ru

В последнее время широкое распространение получили исследования, направленные на разработку новых наноматериалов, обладающих теми или иными уникальными свойствами. В технологии разделения газов можно продвигаться по двум направлениям: либо практически определить свойство проницаемости мембран, сделанных из новых материалов, либо, имея в своем распоряжении известные наночастицы (фуллерены, углеродные нанотрубки, графены, нанонити и др. ), теоретически конструировать мембраны и прогнозировать транспорт атомов и молекул через эти модельные структуры, приближаясь в их конструировании к уже синтезированным или имеющимся в природе биологическим объектам.

В настоящей работе рассматривается материал, составленный из коротких закрытых нанотрубок. Если добиться согласованной по трубкам ориентации в пространстве, то можно сконструировать слой, обладающий интересными свойствами в отношении разделение газовых смесей. Для расчёта проницаемости был использован метод прямого молекулярно-динамического моделирования, а также метод свободных зон прохождения молекул и атомов. Далее, статистическими расчётами определяется проницаемость в отношении отдельных компонент, а также степень разделения бинарной смеси газов. Результаты расчетов показывают степень разделения метан гелевой смеси порядка двух-трёх единиц.

## Список литературы

[1] Study of ionic transport through metalized nanoporous membranes functionalized with self-assembled monolayers / Damena D. Agonafer, Muhammed E. Oruc, Edward Chainani, Ki Sung Lee, Huan Hu, Mark A. Shannon // Journal of Membrane Science. 2014. V. 461. P. 106-113. DOI: 10.1016/j.memsci.2014.03.009.

[2] Chengzhen Sun, Boyao Wen, Bofeng Bai Application of nanoporous graphene membranes in natural gas processing: Molecular simulations of  $CH_4/CO_2$ ,  $CH_4/H_2S$  and  $CH_4/N_2$  separation // Chemical Engineering Science. 2015. V. 138. DOI: 10.1016/j.ces.2015.08.049.

# Исследование течения в пламени с применением методов ИК-диагностики

Долгина И.К.

Томский государственный университет, г. Томск

e-mail:miss.dolgina@yandex.ru

В докладе представлено исследование течения в пламени, образующемся при диффузионном горении со свободной поверхности ряда жидких углеводородных топлив: бензин, керосин и дизельное топливо. Измерения проводились при помощи методов ИК-термографии в узком спектральном диапазоне 2.5-2.7 мкм. Выбор спектрального диапазона обусловлен спектром излучения пламени и рекомендациями [1]. В дальнейшем производилась обработка последовательности «мгновенных» термографических изображений в результате чего при помощи быстрого преобразования Фурье получался спектр изменения температуры в пламени. Согласно [2] многократные пульсации температуры в пламени обусловлены турбулентностью в пламени и перемещением турбулентных структур, которые проявляются как температурные неоднородности на «мгновенной» термограмме пламени.

По предложенной в [2] модели были рассчитаны размеры крупных турбулентных структур в пламени по спектру изменения температуры в нем. Получено удовлетворительное согласование с размерами температурных неоднородностей, поддающихся идентификации на «мгновенных» термограммах.

## Список литературы

1. Лобода Е.Л., Рейно В.В., Агафонцев М.В. Выбор спектрального интервала для измерения полей температуры в пламени и регистрации экранированных пламенем высокотемпературных объектов с применением методов ИК-диагностики // Известия вузов. Физика, 2015. № 2. Т. 58. С. 124-128.
2. E.L. Loboda, O.V. Matvienko, V.P. Vavilov, V.V. Reyno, Infrared thermographic evaluation of flame turbulence scale // Infrared Physics & Technology 72 (2015) 1–7.

# Моделирование деформационного поведения поликристаллического титана<sup>9</sup>

Емельянова Е. С.

Национальный исследовательский Томский государственный университет, Томск

e-mail: emelyanova\_es13@mail.ru

Процессы деформации в материалах протекают на разных масштабных уровнях, и поведение материалов во многом определяется внутренней структурой. Один из перспективных подходов к моделированию поведения материалов под нагрузкой предполагает введение внутренней структуры в явном виде. Таким образом, учитываются механизмы деформации на микро- и мезоуровнях, а макроскопический отклик определяется путем осреднения на более мелких масштабах. В рамках такого подхода в настоящей работе проведен численный анализ напряженно-деформированного состояния трехмерных структур поликристаллического титана с учетом модифицированной структуры поверхностных слоев, подвергнутых ультразвуковой обработке (УЗО).

На основе экспериментальных данных методом пошагового заполнения построены модельные микроструктуры, учитывающие изменение размера зерна по глубине образца. Определяющие соотношения, описывающие упругопластическое поведение зерен, были построены с использованием моделей анизотропной упругости и физической теории пластичности кристаллов. Краевые задачи в динамической постановке решались численно, методом конечных элементов. Исследовано влияние УЗО модифицированных поверхностных слоев на деформационные процессы на поверхности и в объеме, локализацию пластической деформации и эволюцию деформационного рельефа в условиях одноосного растяжения.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю Романовой В.А. за полезные дискуссии и ценные замечания.

---

<sup>9</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 17-08-00643 А.

# Численное моделирование процессов двухфазной фильтрации в трещиновато-пористых средах

Задueva С.Г.

НИ ТГУ, Томск

e-mail:zadueva@email.ru

Данная работа посвящена построению математической модели движения несжимаемой жидкости и идеального газа в недеформируемой среде.

Программа, созданная в работе, позволяет получать распределение давления жидкости и газа в зависимости от времени, что в дальнейшем помогает анализировать динамику течения. Полученные расчеты могут быть полезны для разработки месторождения жидкости и газа, для решения ряда экологических проблем.

Для построения математической модели используются два закона сохранения. Закон сохранения массы рассматривается как уравнение неразрывности, имеющие вид для жидкости и газа:

$$\frac{\partial \rho^w S m}{\partial t} + \operatorname{div} \rho^w \vec{W}^w = 0 \quad \frac{\partial \rho^g S m}{\partial t} + \operatorname{div} \rho^g \vec{W}^g = 0 \quad (1),$$

$$\frac{\partial \rho^g (1-S)m}{\partial t} + \operatorname{div} \rho^g \vec{W}^g = 0 \quad \frac{\partial \rho^w (1-S)m}{\partial t} + \operatorname{div} \rho^w \vec{W}^w = 0 \quad (2),$$

В качестве закона сохранения импульса в работе будет рассматриваться обобщённый закон Дарси для жидкости и газа, соответственно:

$$\vec{W}^w = -\frac{k_a k_r^w(s)}{\mu^w} \cdot \vec{\nabla} P^w \vec{W}^w = -\frac{k_a k_r^w(s)}{\mu^w} \cdot \vec{\nabla} P^w \quad (3),$$

$$\vec{W}^g = -\frac{k_a k_r^g(s)}{\mu^g} \cdot \vec{\nabla} P^g \vec{W}^g = -\frac{k_a k_r^g(s)}{\mu^g} \cdot \vec{\nabla} P^g \quad (4)$$

Замыкающие соотношения для относительных фазовых проницаемостей и капиллярного давления взяты аналогично работе [1].

Для проведения численных расчетов была подготовлена компьютерная программа на языке C++. Достоверность полученных результатов подтверждается хорошим согласованием с имеющимся аналитическим решением [2].

## Список литературы

- [1] Д. О. Диль, А. М. Бубенчиков, “Двухфазная фильтрация в трубе, заполненной пористым материалом”, *Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех.*, 2013, № 5(25), 45–51
- [2] Х.Азиз, Э.Сеттари, “Математическое моделирование пластовых систем”, - М. : Недра, 1982. – 402с.

# **Общее уравнение динамики механической системы. Уравнения Лагранжа второго рода. Канонические уравнения Гамильтона**

**Зайцев В.В., Штанько В.А.**

ТГУ, Томск

e-mail: za9c-9@mail.ru

Механическая система состоит из четырех тел с двумя степенями свободы, соединенных посредством невесомых, нерастяжимых нитей. Необходимо составить уравнения движения механической системы с помощью общего уравнения динамики. Составить уравнения движений этой же системы в виде уравнений Лагранжа второго рода. Составить уравнения системы равновесия системы с помощью принципов виртуальных перемещений и определить неизвестную силу. Составить уравнения малых движений системы около положения равновесия её. Найти общий и частный интегралы этих уравнений. Найти главные (нормальные) координаты. Исследовать характер малых движений и характер положения равновесия. Составить канонические уравнения движения системы. Численно проинтегрировать полученные уравнения движения на интервале времени, достаточном для установления характера движения системы, при различных вариантах задания начальных условий. Для численного решения дифференциальные уравнения преобразуем к каноническим уравнениям. Получим четыре уравнения первого порядка. Интегрирование правых частей уравнения Гамильтона с соответствующими начальными условиями методом Рунге-Кутты первого порядка было реализовано с помощью ЭВМ. Численное решение канонических уравнений позволяет определить тип рассматриваемого положения равновесия, оценивая максимальные отклонения значений  $x$  и  $\varphi$  от равновесных значений.

## **Список литературы**

Основы курса теоретической механики : Том 3 Аналитическая механика / М.А. Шеремет, В.А. Штанько, 2013. – 232с.

# Использование неструктурированных сеток для решения задач двухфазной фильтрации

Какышев М.М., Диль Д.О.

НИ ТГУ, Томск

e-mail: merjankakishev@mail.ru

С численной точки зрения моделирования потока и транспорта жидкости в гетерогенных и анизотропных нефти-газохранилищах представляет собой большую проблему из-за моделирования сложных осадочных сред, включая наклонные слоистые слои, каналы, трещины и разломы. Моделирования отклонения позволяют строить и обрабатывать процесс определения резервуара, в частности, используя неструктурированных сеток. В данной работе рассматривается задача вытеснения нефти водой, когда процесс вытеснения происходит в прямолинейном тонком горизонтальном образце, у которого пористость и проницаемость постоянны.

В ходе решения задачи представлено численное и аналитическое решение задачи двухфазной фильтрации в недеформируемом пласте, численное решение получено методом контрольного объема [1] с неструктурированной сеткой. Решение нелинейных дискретных уравнений осуществлялось итерационным методом Ньютона [2]. В итоге было установлено, что численное и аналитическое решение имеет максимально близкие значения.

Из результатов следует, что полученным численным подходом с использованием неструктурированных сеток можно пользоваться в нефтяной и газовой промышленности для расчета эффективных фильтрационных характеристик вытеснения нефти водой.

## Список литературы

- [1] Диль Д.О., Бубенчиков А.М. Двухфазная фильтрация в трубе, заполненной пористым материалом. Вестник ТГУ. 2013. № 5 (25). С. 45-51
- [2] Nicolaevskij V.N. Mechanics of Porous and Fractured Media/V. N. Nicolaevskij –Singapore: World Scientific, 1990 - 472 p.

# **Комплексное моделирование кристаллизации жидкости, обладающей инверсной зависимостью плотности от температуры, в прямоугольных полостях<sup>10,2</sup>**

**Бердников В.С., Гришков В.А., Гусельникова О.О., Кислицын С.А.**

ИТ СО РАН, НГТУ, Новосибирск

e-mail:100pch@mail.ru

Численно и экспериментально исследован процесс кристаллизации жидкости в прямоугольных полостях после охлаждения одной из стенок до температуры ниже температуры кристаллизации. Рабочая среда – вода, обладающая инверсной зависимостью плотности от температуры. Аналогичными зависимостями обладают расплавы, например, галлия и эвтектики кадмий-ртуть-теллур. Инверсная зависимость плотности расплава от температуры вблизи температуры кристаллизации вносит особенности в гидродинамику расплавов у фронта кристаллизации и в локальный теплообмен. Численно исследована нестационарная конвекция с учетом зависимости плотности от температуры и теплоты кристаллизации. Расчеты проведены методом конечных элементов [1] с использованием адаптивной треугольной сетки, отслеживающей положение фронта кристаллизации на каждом временном шаге и сгущением с обеих его сторон, а также в различной степени ко всем границам расчетной области. Кривизна фронта кристаллизации и темп роста массы затвердевшего вещества зависят от процессов сопряженного конвективного теплообмена на границе раздела фаз. Полученные данные могут быть полезны при анализе процессов роста кристаллов методами направленной кристаллизации веществ обладающих инверсной зависимостью плотности расплава от температуры.

## **Список литературы**

[1] Соловейчик Ю.Г., Рояк М.Э., Персова М.Г. Метод конечных элементов для решения скалярных и векторных задач // Новосибирск : НГТУ, 2007. – 896 с.

---

<sup>10</sup><sub>1</sub> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 18-38-00790 мол\_а.

<sup>2</sup> Работа выполнена в рамках государственного задания ИТ СО РАН (проект III.18.2.5., Гос. рег. АААА-А17-117022850021-3).

# **Влияние малых энергетических возмущений на пульсации температуры в пламени**

**Климентьев А.С.**

Томский Государственный Университет, Томск

e-mail: aleksandr.klimentev.96@mail.ru

В докладе представлены результаты экспериментального исследования влияния низкочастотных звуковых колебаний с разной частотой на процесс диффузионного горения ряда жидких углеводородных топлив (бензин, керосин, дизельное топливо).

Источником низкочастотных звуковых колебаний являлась установка, состоящая из генератора низкочастотных звуковых колебаний, позволяющего генерировать сигнал разной формы с частотами от 0 до 13 Гц, усилителя этого сигнала и низкочастотной излучающей акустической системы. В ходе эксперимента непрерывно контролировалась убыль массы топлива с записью на компьютере и поле температуры в пламени при помощи тепловизора JADE J530SB с узкополосным оптическим фильтром с полосой пропускания 2.5-2.7 мкм. Выбор этого спектрального интервала обусловлен спектрами излучения пламени и рекомендациями [1].

Согласно [2] пульсации температуры в пламени с определенными частотами обусловлены турбулентным характером течения в пламени. В результате обработки экспериментальных данных было получено влияние рассмотренных звуковых воздействий на спектр изменения температуры в пламени и на темп убыли массы топлива.

## **Список литературы**

- [1] Лобода Е.Л., Рейно В.В., Агафонцев М.В. Выбор спектрального интервала для измерения полей температуры в пламени и регистрации экранированных пламенем высокотемпературных объектов с применением методов ИК-диагностики // Известия вузов. Физика, 2015. № 2. Т. 58. С. 124-128.
- [2] E.L. Loboda, O.V. Matvienko, V.P. Vavilov, V.V. Reyno, Infrared thermographic evaluation of flame turbulence scale // Infrared Physics & Technology 72 (2015) 1–7. [3] Чехлов А.Р. О скобке Ли эндоморфизмов абелевых групп // Вестник Томского госуниверситета. Математика и механика. 2009. № 2(6). С. 78 – 84.

# Проницаемость укладок многостенных нанотрубок

Колыхалова О. Э., Бубенчиков А. М.

Томский государственный университет, Томск  
e-mail: ms.friol@mail.ru

Вопросы проницаемости нанопористых структур имеют большое значение при решении задач разделения газов, очистки воды, а так же для изучения условий поддержания жизнедеятельности в биологических системах.

Воспользуемся модифицированным  $LJ$ -потенциалом [1]. С его помощью осесимметричное распределение энергии внутри и вокруг трубки конечной длины можно получить, численно проводя двукратное интегрирование [2]:

$$U_k(r\xi z) = 4 a_k q \int_0^{\frac{a}{2}} \int_0^l \left( \frac{\sigma}{\rho} \right) \left[ \left( \frac{\sigma}{\rho} \right)^{11} - \left( \frac{\sigma}{\rho} \right)^5 \right] d \quad dz \quad (1)$$

$$\rho^2 = r^2 + a^2 - 2ar \cos \varphi' + (z - z')^2, \quad (2)$$

Опираясь на распределение Максвелла для частиц, находящихся перед мембраной, можно найти долю прошедших через слой молекул, определяющуюся лишь предельной скоростью молекул:

$$D_o = \beta \sqrt{\frac{\beta}{\pi}} \int_{w_{np}}^{\infty} \exp(-w^2) dw \quad (3)$$

Здесь  $w_{np}$  – предельная скорость молекулы-представителя.

Распределение Максвелла, справедливое для каждой из подсистем исходной смеси газов, используется здесь как способ набора статистики по исходному состоянию газовых компонент.

## Список литературы

- [1] Bubenchikov A.M. The Potential Field of Carbon Bodies as a Basis for Sorption Properties of Barrier Gas Systems / A.M. Bubenchikov, M.A. Bubenchikov, A.I. Potekaev, E.Ye. Libin, Yu.P. Hudobina // Russian Physics Journal. – 2015. – Vol. 58, № 7. – P. 882–888. DOI: 10.1007/s11182-015-0586-6.
- [2] Бубенчиков М.А., Колыхалова О.Э., Усенко О.В. Расчет проницаемости укладок многостенных нанотрубок //Вестн. Том.

# Численное решение задачи о распространении верхового лесного пожара

Коржова А.Ю., Перминов В.А.

Томский политехнический университет, город Томск  
e-mail: koralsasha96@gmail.com

Лесные пожары являются чрезвычайно сложным и разрушительным природным явлением, возникновение и развитие которых зависят от запаса и влагосодержания лесных горючих материалов, метеорологических условий, рельефа местности и других факторов. Общей целью исследования лесных пожаров является более глубокое понимание данного явления [1]. Наиболее опасным видом пожаров являются верховые. Основные механизмы возникновения различных видов пожаров в лесных массивах до конца не определены. Проведение экспериментальных исследований для изучения лесных пожаров являются опасными и дорогостоящими. Поэтому интерес представляют теоретические методы исследования. Метод математического моделирования дает возможность описывать наиболее важные характеристики лесного массива, приземного слоя атмосферы и условия распространения лесных пожаров [2]. В работе изучается влияние ветра, метеорологических условий, влагосодержания, температуры, времени на скорость распространения верховых лесных пожаров. Математически данная задача сводится к решению системы дифференциальных уравнений в частных производных с соответствующими граничными и начальными условиями [3].

## Список литературы

- [1] Халдина Е.А. Математическое моделирование распространения лесных пожаров с учетом противопожарных преград // Вестник науки Сибири. – 2013. – №4(10). – С. 98-103.
- [2] Перминов В. А. Математическое моделирование возникновения верховых и массовых лесных пожаров // Вестник Томского государственного университета – 2010. – 283 с.
- [3] Гришин А.М., Зятнин В.И., Перминов В.А. Экспериментальное исследование перехода низового лесного пожара в верховой // ВИНТИ – 1991. – № 982-91 – С.22.

# **Экспериментальное исследование поля скорости конвективного течения, создаваемого круглым источником тепла <sup>11</sup>**

**Кучинский М.О., Сбоев И.О., Рыбкин К.А., Гончаров М.М.**

Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь

e-mail: kat6chinskiy@gmail.com

Задача потери устойчивости пограничного слоя вблизи нагретой пластины конечных размеров и связанные с этим явлением различные сценарии формирования конвективного факела к настоящему времени остаются слабо изученной стороной вопроса об эволюции целого ряда крупномасштабных течений. Ввиду сравнительно небольшого объема экспериментального материала в этой области цель настоящей работы - показать различный характер формирования одиночного конвективного факела в зависимости от условий подогрева жидкости, а также изучить структуру течения вблизи компактных источников тепла.

В рамках выполненного исследования проводилась визуализация течения над нагретыми пластинами диаметром 10, 20 и 35 мм, находящимися в заполненной водой трехмерной полости. Линейные размеры слоя жидкости на порядок превышали размер подогреваемой области, а внимание уделялось в основном начальному этапу развития конвективного течения. Задача заключалась в наблюдении структуры течения жидкости на этапе формирования конвективного факела, а также в измерении поля скорости в плоскости центрального сечения рабочей полости. Результаты наблюдений использовались для верификации разработанной численной модели.

В ходе экспериментов за счет съемки светорассеивающих частиц нейтральной плавучести с одновременным наблюдением поля концентрации флуоресцентного красителя (Родамин Б) удалось пронаблюдать развитие течения в плоскости лазерного ножа с длиной волны 532 нм и восстановить поле скорости жидкости методом PIV. Кроме того, путем объединения моментальных фотографий траекторий частиц были получены характерные линии тока жидкости на различных этапах формирования конвективного факела. Результаты наблюдений качественно согласуются с предсказанной в ходе численного моделирования структурой течения.

---

<sup>11</sup> Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-31-00165

# Моделирование течения жидкостей в сквозных и тупиковых капиллярах

Васильева К.А., Кугот А.А., Лобанова И.С., Калининченко А.Н.

Томский политехнический университет, г. Томск  
e-mail: konarevai007@tpu.ru

Сообщение полостей дефектов, таких как трещины, поры, непровары, с окружающей контролируемое тело средой является необходимым условием капиллярного неразрушающего контроля. Очевидно, что чем быстрее и глубже дефекты заполняются жидкостью, тем эффективнее процесс контроля. Поэтому выявление закономерностей заполнения жидкостями тупиковых и сквозных капилляров на заданную глубину и продолжительность этого заполнения является актуальной задачей. На основе модифицированного уравнения Порхаева авторами [1] был разработан программный комплекс, решающий уравнение движения жидкости в цилиндрическом капилляре с учетом шероховатости поверхности, наличия участков с различными параметрами смачивания, аналитического изменения размера капилляра на различных участках, его наклона относительно горизонтали в предположении движения жидкости близкого к ламинарному. А представление дифференциального уравнения второго порядка в виде системы уравнений первого порядка позволит применить методы численного интегрирования на основе интегратора Рунге – Кутты четвертого порядка.

$$\square_1'' + \frac{1}{\square_1} (\square_1')^2 + \frac{8\mu(r, r_a)}{r^2(\square_1)\rho} \square_1' - \frac{2\sigma(\square_1)a(\square_1) \cos \cos (\square_s(\square_1))}{r(\square_1)\rho \square_1} + \frac{p_a}{\rho(\square_0 - \square_1)} + g \sin(\alpha) = 0$$

С помощью предложенного программного комплекса, исследовано движение жидкостей в сквозных и тупиковых капиллярах, с размерами 900 мкм и 300 мкм, а также построены зависимости глубины проникновения жидкости от времени в капилляры из стали, так как большинство образцов для испытаний изготовлены из этого материала и стекла – для проверки работоспособности применяемой математической модели. В качестве проникающих жидкостей спирт и керосин, как основные составляющие дефектоскопических материалов.

## Список литературы

[1] I S Lobanova , V A Meshcheryakov and A N Kalinichenko Modeling of liquid flow in surface discontinuities // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 289 (2018) 012023

# **Изучение влияния угла наклона полости на режимы термогравитационной конвекции степенной жидкости при наличии тепловыделяющего элемента<sup>12</sup>**

**Лоенко Д.С, Шеремет М.А.**

Томский государственный университет, г. Томск

e-mail:whiteink@bk.ru

Теплопередача путем естественной конвекции жидкости в полости играет важную роль в научных интересах многих исследователей. Данный процесс применяется в различных инженерных областях, таких как геотермальные системы, теплообменники, химическая и пищевая промышленность и т.д. В подобных задачах зачастую агентом теплопереноса является вода или воздух. К сожалению, исследований, посвященных анализу влияния неньютоновских сред на структуру течения и теплоперенос, не так много. Поэтому целью настоящей работы является математическое моделирование термогравитационной конвекции степенной жидкости в замкнутой квадратной полости с источником постоянного объемного тепловыделения.

В работе моделируется процесс естественной конвекции неньютоновской жидкости, поведение которой подчиняется степенному закону Оставльда-де-Вилла, наполняющей замкнутую квадратную полость. В центре нижней стенки полости расположен источник постоянного объемного тепловыделения. Уравнения Навье-Стокса, описывающие теплоперенос в полости, записываются в преобразованных переменных «функция тока – завихренность – температура». Для решения сформулированной задачи применяется метод конечных разностей. Алгоритм и программный код, разработанные для решения, были детально протестированы на классе модельных задач, а также проанализированы на сеточную сходимость.

В результате численного анализа были получены распределения линий тока и изотерм в зависимости от определяющих параметров, таких как число Рэлея, индекс степенного закона, относительный коэффициент теплопроводности, угол наклона полости, влияющих на структуру течения и теплоперенос. Также были установлены зависимости среднего числа Нуссельта и средней температуры внутри тепловыделяющего элемента от определяющих параметров задачи.

---

<sup>12</sup><sub>1</sub> Работа выполнена при финансовой поддержке РФН, проект 17-79-20141.

# **Исследование турбулентности в пламени при горении некоторых видов топлив с применением оптических методов**

**Луценко А. В., Лобода Е. Л.**

Томский Государственный Университет, Томск

e-mail: anastas\_mex\_mat434@mail.ru

В данной работе проводится экспериментальное исследование масштабов турбулентных вихрей в пламени с применением PIV-метода [1] и сравнение полученных результатов с результатами термографических исследований [2] полей температуры. В качестве топлив использовались ряд жидких углеводородных топлив и некоторые твердые растительные горючие материалы. Представлено описание планарных методов диагностики потока и экспериментальной установки, которая использовалась при проведении экспериментов, и проиллюстрирована методика обработки результатов.

## **Список литературы**

- [1] V.T. Kuznetsov and E.L. Loboda Experimental study of peat ignition upon exposure to radiant energy // Combustion, Explosion, and Shock Waves, Vol. 46, No. 6, 2010. p. 690-695.
- [2] E.L. Loboda, O.V. Matvienko, V.P. Vavilov, V.V. Reyno, Infrared thermographic evaluation of flame turbulence scale // Infrared Physics & Technology 72 (2015) 1–7.

# Моделирование коэффициентов переноса смесей многоатомных разреженных газов стохастическим алгоритмом

Любимов Д. Н.

НГАСУ (Сибстрин), Новосибирск

e-mail: danillch@mail.ru

Исследование свойств течений требует знания коэффициентов переноса. Существующие экспериментальные методики позволяют это сделать с достаточной точностью, однако требуют достаточно простого оборудования и значительных трудозатрат. В разреженных газах задача принципиально решается с помощью кинетической теории, но ее применение для многоатомных газов и их смесей весьма трудоемко. Других методов молекулярного моделирования не существует, поскольку метод молекулярной динамики в этом случае практически не применим из-за необходимости использования огромного числа молекул для моделирования.

В работах [1, 2] развит стохастический метод молекулярного моделирования коэффициентов переноса разреженного газа. Целью данной работы является развитие этого подхода на случай многоатомных газов и их смесей. Взаимодействие молекул описывается потенциалом Леннарда-Джонса. Пара для взаимодействия выбирается случайным образом исходя из времени свободного пробега молекул. Коэффициенты переноса вычисляются на основе флуктуационно-диссипационных теорем (формул Грина-Кубо). Данные моделирования сопоставлены с экспериментальными и показано, что, используя сравнительно небольшое число частиц, удастся достигнуть точности вычисления коэффициентов переноса сопоставимой с точностью их экспериментального определения.

## Список литературы

[1] V.Ya.Rudyak, E.V. Lezhnev. Stochastic method for modeling of the rarefied gas transport coefficients. J. Computational Physics. 2018.V. 355.P. 95-103.

[2] В. Я. Рудяк, Е. В. Лежнев. Стохастический метод моделирования коэффициентов переноса разреженного газа. Матем. моделирование. 2017. Т. 29. № 3. С. 113-122.

# **Процессы упругой деформации в жаропрочных никелевых сплавах V поколения ВЖМ 8 с кубической симметрией свойств при ударном нагружении в направлениях [001], [011] и [111]**

**Майер Я.В.**

Томский Государственный Университет, Томск

e-mail: [fkmaf12345@sibmail.com](mailto:fkmaf12345@sibmail.com)

Разработка материалов на основе металлических монокристаллов создает большие возможности не только для повышения эксплуатационных параметров изделий, работающих в экстремальных условиях, но и позволяет существенно увеличить температурно-временную стабильность и долговечность работы. Эффект анизотропии у монокристаллов дает дополнительные возможности для управления свойствами наряду с легированием, термомеханической обработкой и другими внешними воздействиями. С помощью численного моделирования получены волновые картины деформирования преград из жаропрочного никелевого сплава V поколения ВЖМ8. Для исследования механических свойств в направлениях [001], [011] и [111] в монокристаллических сплавах получают отливки образцов с использованием затравочных монокристаллов из сплава Ni-W. Образцы имеют цилиндрическую форму, продольная ось образцов совпадает с одним из направлений: [001], [011] и [111]. В этих направлениях исследуют модули Юнга, а также коэффициенты Пуассона в условиях растяжения при различных температурах. Значения модулей Юнга в этих направлениях отличаются в 2,5 раза, а различия значений коэффициентов Пуассона – от 1.5 до отрицательных значений.

Численно, в трехмерной постановке проведено исследование распространения волн напряжений в направлениях [001], [011] и [111] монокристалла ВЖМ8, совпадающих с направлениями ударного нагружения. Показано, что при совпадении направления нагружения с направлением [011] процесс деформации ВЖМ8 сопровождается ауксетичностью, определяемой наличием отрицательного значения коэффициента Пуассона.

# Математическая модель аэродинамики вращающейся камеры

Авторы Бубенчиков А.М., Бубенчиков М.А., Мамонтов Д.В.

ТГУ, Томск

e-mail: [orevaore@mail.ru](mailto:orevaore@mail.ru)

В работе представлена модель аэродинамики камеры, находящейся в движении, наиболее интересным случаем представляется изучение вторичных течений при центрифугировании газа. Создана программа в `fortran90`, в которой производится решение уравнений Навье-Стокса в переменных завихренность-функции тока с использованием конечных разностей и метода последовательной перерелаксации. В качестве граничных условий выбраны условия Тома. Результатом работы программы являются значения завихренности и тока, а, следовательно, и графики линий уровня. Полученные для воздуха и высоких частот вращения барабана значения позволяют сделать вывод о слабой значимости создаваемых вращением вихрей Тейлора, в особенности, возле стен камеры, по сравнению с переносным движением, созданным вращением камеры. Этот вывод позволяет в значительной мере упростить последующие решения. В последующем планируется разработать модель, позволяющую рассчитывать движение частиц ксенона при помощи центрифугирования. Это один из простейших и дешевых методов получения чистого ксенона, который в свою очередь широко применим в медицине, а именно в качестве обезболивающего, наркоза, в кардиологии и иммуномодуляции. Однако выделение чистого ксенона обычно сопровождается сложным технологическим процессом, и как следствие имеет высокую цену.

## Список литературы

- [1] Бубенчиков М.А. Механическое сопротивление компактных наночастиц в воздушной среде // Изв. вузов. Физика. 2011. № 1. С. 92–96.
- [2] Потехаев А.И., Бубенчиков М.А. Седиментация наночастиц в поле центробежных сил // Изв. вузов. Физика. 2011. № 2. С. 37–42.
- [3] Бубенчиков М.А., Иванова И.А. Расчет аэродинамики циклонной камеры // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2011. № 1(13). С. 46–51.

# Исследование естественной конвекции во вращающейся пористой полости с использованием неравновесной температурной модели<sup>13</sup>

Михайленко С.А., Шеремет М.А.

ТГУ, Томск

e-mail: stepanmihaylenko@gmail.com

Рассматривается естественная конвекция в замкнутой квадратной полости, вращающейся с постоянной угловой скоростью. Вертикальные стенки поддерживаются при постоянной температуре  $T_h$  и  $T_c$ , причем  $T_h > T_c$ . Внутренняя часть полости включает горизонтальный пористый слой высоты  $h$  и горизонтальный слой чистой среды высоты  $L-h$ , где  $L$  – высота полости. Жидкость, наполняющая полость, считается ньютоновской и удовлетворяет приближению Буссинеска.

Жидкость является теплопроводной, а ее теплофизические свойства не зависят от температуры, поток ламинарный. Основные уравнения сформулированы в переменных «функция тока – завихренность» [1], при этом предполагается, что температура жидкой среды отличается от температуры пористого скелета и применяется локально-неравновесная модель. Пористый скелет считается изотропным и однородным, а граница раздела сред проницаема, таким образом, жидкость может проникать в пористый слой. Боковые стенки непроницаемы.

Результаты получены для широкого диапазона изменения определяющих параметров: числа Нилда, высоты пористой вставки и числа Тейлора. Рассматривалось влияние определяющих параметров на интенсивность теплообмена и течения в полости. Получены и описаны распределения температуры и линий тока.

## Список литературы

[1] Mikhailenko S.A., Sheremet M.A., Mahian O. Effects of uniform rotation and porous layer on free convection in an enclosure having local heat source // International Journal of Thermal Sciences. 2019. V.138. P. 276–284.

# Факторы риска при работе трансформаторов

Михалева С.К., Амелькович Ю.А.

Томский политехнический университет, г.Томск  
e-mail: [amely@tpu.ru](mailto:amely@tpu.ru)

Будучи крайне необходимым и дорогостоящим оборудованием, трансформаторы играют важную роль в передаче электроэнергии и целостности энергетической системы в целом. Тем не менее, трансформаторы имеют свой ресурс эксплуатации, в случае превышения которого может произойти отказ трансформатора. Под воздействием неблагоприятных условий системе и системному оборудованию могут быть нанесены тяжелые повреждения, кроме того, возможно недопустимое прерывание снабжения потребителей [1].

Любой трансформатор рассчитан на определенную мощность, при превышении которой трансформатор выйдет из строя. Если ток нагрузки будет возрастать постепенно до своего критического максимального значения, трансформатор просто перегреется. Материалы его изоляции потеряют свои свойства при высокой температуре, произойдет короткое замыкание и трансформатор выйдет из строя, а если мгновенно, то произойдет взрыв трансформатора.

К опасными факторами при работе электрической станции относятся: опасность поражения электрическим током; электромагнитные поля; избыточное выделение тепла; возникновение пожаро- и взрывоопасных зон [2]; наличие опасных зон в котельном и турбинном отделениях на оборудовании, работающем под давлением и с высокой температурой.

Главными последствиями взрывов трансформатора помимо того, что в область разрушений попадает большая площадь, как производственной зоны (что в себя включает и травматизм, и гибель на рабочих местах) так еще и большое количество людей остается без электричества, вследствие чего наступает режим чрезвычайно ситуации.

## Список литературы

[1] Инструкция по охране труда при эксплуатации масляных трансформаторов станций проводного вещания / Охрана труда в России. URL: [https://ohranatruda.ru/ot\\_biblio/instructions/168/1786/](https://ohranatruda.ru/ot_biblio/instructions/168/1786/)

[2] НПБ 105-03. «Определение категорий помещений и зданий по взрывопожарной и пожарной опасности».

# Исследование процессов горения жидких углеводородов в струе перегретого водяного пара<sup>14</sup>

Мухина М. А., Ануфриев И. С.

ФГБУН Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН,  
Новосибирск

e-mail: Mary-Andr@yandex.ru

В настоящее время актуальной является задача утилизации некондиционных жидких углеводородов, таких как отходы нефтепереработки, смазочные жидкости, отработанные масла и др. Эти горючие жидкости плохо воспламеняются, выделяют большое количество сажи, имеют низкую полноту сгорания, со временем происходит коксование горелочного устройства, поэтому возникает необходимость создания и развития методов для более эффективного и экологически безопасного их сжигания [1].

В ИТ СО РАН предложен новый способ сжигания жидких углеводородов в струе перегретого водяного пара, при котором происходит газификация углеродосодержащих частиц неполного сгорания жидкого углеводородного топлива. Экспериментально показано, что в присутствии перегретого пара горение резко интенсифицируется, практически полностью отсутствует сажа [2].

В данной работе исследовано влияние режимных параметров на характеристики сжигания жидких углеводородов в струе перегретого водяного пара. Получены данные о распределении температуры в факеле, проведены калориметрические измерения тепловыделения и газовый анализ состава продуктов сгорания.

## Список литературы

- [1] Алексеенко С.В., Пащенко С.Э., Саломатов В.В. Нанокластерное инициирование горения некондиционных углеводородных топлив // Инженерно-физический журнал. 2010. Т. 83, № 4. С. 682–693
- [2] Алексеенко С. В., Ануфриев И. С., Вигриянов М. С., Копьев Е. П., Шарыпов О. В. Характеристики процесса сжигания дизельного топлива в горелочном устройстве с подачей струи перегретого водяного пара // Физика горения и взрыва. — 2016. — Т.52, № 3. — С. 37–44.

---

<sup>14</sup> Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда, проект № 18-79-10134.

# **Деформирование и разрушение полимерных композитов, армированных стекловолокном**

**Негматов М.М., Кривошеина М.Н.**

Томский Государственный Университет

Mohsen\_199704@mail.ru

Развитие современных технологий требует создания различных новых изделий из полимерных материалов, обладающих, кроме высоких технологических и эксплуатационных характеристик, способностью сохранять свои свойства при воздействии различных деструктивных факторов. Композиционные материалы, в особенности армированных стекловолокном, представляют собой гетерогенные системы, обладающие ярко выраженной анизотропией свойств, как в отношении деформации, так и в отношении прочности. В условиях нагружений на их процесс деформирования влияет их сложное строение, которое выражается в том, что упругие свойства определяются шестью независимыми упругими постоянными [1]. При динамическом нагружении такие материалы имеют различные скорости распространения продольных волн в различных направлениях осей симметрии материала [2]. В настоящей работе МКЭ в трехмерной постановке моделируется ударное нагружение преграды из полимерных композитов, армированных стекловолокном. Проведено сравнение результатов, полученных численно и в натуральных экспериментах [3].

## **Список литературы:**

1. Р. Кристенсен. Введение в механику композитов//Мир. М. 1982,336с.
2. Поведение полимерного композита, армированного S2-стекловолокном, при ударном сжатии. Статья.
3. Роберт Э.Ньюнхем. Свойства материалов. Анизотропия, симметрия, структура. //НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, Институт компьютерных исследований, 2007-652с,

# Численное моделирование течения газа внутри генератора струй нулевого массового расхода<sup>15</sup>

Перчаткина Е. В.

Томский государственный университет, г. Томск  
e-mail: perchatkinae@mail.ru

В настоящей работе рассматривается элементарная модель генератора струй нулевого массового расхода (СНМР), основанная на примере формирования течения газа в прямоугольной области с открытой правой границей под действием движущейся мембраны. СНМР являются эффективным способом контроля отрыва течения: расположение СНМР в точке срыва потока существенно улучшает аэродинамические характеристики летательных аппаратов [1, 2].

Решение данной задачи было получено с помощью численного моделирования в программном пакете Ansys Fluent [3]. Изучена зависимость картины течения невязкого газа внутри полости генератора СНМР от расположения мембраны и от закона, по которому совершается ее колебание.

Расчет на разностных сетках, содержащих 100x12, 200x25 и 400x100 ячеек, показал сходимость полученного численного решения.

## Список литературы

- [1] Smith B. L. Vectoring a High Aspect Ratio Rectangular Air Jet Using a Zero-net-mass-flux Control Jet / B. L. Smith, A. Glezer // Bull. Am. Phys. Soc. – 1994 – vol. 39 – P. 1894.
- [2] Recent developments on synthetic jets / T. Murugan [et al.]// Defence Science Journal – 2016 – vol. 66, no. 5 – P. 489-498.
- [3] Ansys Fluent 14.0 Theory Guide / Справочное пособие // Издательство ANSYS, Inc. Southpointe – 2011 г. – 862 с.

---

<sup>15</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания No 9.9625.2017/8.9.

# Математическая модель селективной нанопоры

Потеряева В. А.

НИ ТГУ, г. Томск

e-mail: [valentina.poteryaeva@gmail.com](mailto:valentina.poteryaeva@gmail.com)

Разделение смесей с помощью мембран широко используется в химической, топливно-энергетической, фармацевтической, пищевой и других отраслях промышленности. В частности, ведётся работа по разделению газов с помощью пористых углеродных мембран различной конструкции. В данной работе изучаются селективные свойства углеродной нанопоры по отношению к сепарации метано-гелиевых смесей.

Составленная из углеродных наночастиц мембрана имеет потенциальный барьер, представляющий собой суммированную энергию взаимодействия  $U(z)$  летящей молекулы с каждой наночастицей мембраны в виде [1]. Траектория и скорость движения молекулы находятся из решения системы дифференциальных уравнений с использованием схемы Рунге-Кутты четвертого порядка точности. [2] Проницаемость полученного фильтрующего элемента определяется методом молекулярной баллистики.

Математическое моделирование описанной задачи демонстрирует хорошие селективные свойства углеродной нанопоры в отношении отделения атомов гелия от молекул метана. По результатам расчетов выбран наиболее эффективный диаметр поры, а также оптимальная плотность материала, обеспечивающие наивысшую степень разделения рассматриваемых газов.

## Список литературы

[1] Бубенчиков А. М., Бубенчиков М. А., Потекаев А. И., Либин Э. Е., Худобина Ю. П. // Известия вузов. Физика. – 2015. – Т. 58. – № 7. – С. 10–15

[2] Потеряева В.А., Усенко О.В., Шерстобитов А.А.

Дифференциальная проницаемость ультратонкого пористого слоя монодисперсных наночастиц // Вестник Томского государственного университета

# **Моделирование системы тепловой защиты на основе термоэмиссионной технологии**

**Ромашенко В. А Якимов А. С**

Томский Государственный Университет, Томск

e-mail: romashenko.vlada7@mail.ru

В настоящее время разрабатываются высокоскоростные летательные аппараты, способные маневрировать в плотных слоях атмосферы. К ним относятся спускаемые аппараты перспективных космических кораблей многоразового применения и возвращаемые ступени ракет-носителей. Эти высокоскоростные летательные аппараты испытывают большие динамические и тепловые нагрузки, что может привести к разрушению и изменению их аэродинамических характеристик. Следовательно, очень важно обеспечить тепловую защиту их структурных элементов. Предложена математическая модель процесса нестационарного теплообмена системы термоэмиссионной тепловой защиты при конвективном нагреве. Показано влияние испарения (эмиссии) электронов с поверхности эмиттера на понижение температуры составной оболочки термоэмиссионной тепловой защиты. Исследовано влияние молекулярной массы теплоносителя в составной оболочке на режимы теплообмена в теле. Получено качественное согласие результатов расчета с известными данными.

## **Список литературы**

1. Ю.В. Полежаев, Ф.Б. Юревич. Тепловая защита. М.: Энергия, 1976. 392 с.
2. А.М. Гришин, А.Н. Голованов, В.И. Зинченко, К.Н. Ефимов, А.С. Якимов. Математическое и физическое моделирование тепловой защиты. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2011. 358 с.
3. В.И. Зинченко, К.Н. Ефимов, А.С. Якимов. Расчет характеристик сопряженного теплообмена при пространственном обтекании заглушенного тела с использованием системы комбинированной тепловой защиты // Теплофизика высоких температур. 2011. Т. 49. № 1. С. 81-91.

# Исследование течения битумного вяжущего в трубе

Сабылина Н.Р., Матвиенко О.В.

ТГУ, Томск

e-mail: [Taiga.Natasha@email.ru](mailto:Taiga.Natasha@email.ru)

Основным видом вяжущего, применяемого в дорожной отрасли, является нефтяной дорожный битум: пластичный, способный без разрушения выдерживать воздействие низких температур и температурных перепадов, а также различных деформаций. Технические характеристики битумов связаны с их реологическими свойствами, которые необходимо определять в широком диапазоне температур, диктуемом условиями применения этих материалов. Вязкопластические свойства битумов в интервале температур от 30<sup>0</sup>С до 70<sup>0</sup>С объясняются их структурой. Если величина напряжения, приложенного к среде мала, то течение происходит в пластическом режиме вдоль тонких слоев твердофазной структуры. Сопrotивление течению при этом велико, что объясняет высокие значения вязкости. Прочность структуры характеризуется предельным напряжением сдвига  $\sigma_Y$ . При достижении этого напряжения происходит разрушение твердофазной структуры, что приводит к резкому уменьшению вязкости. Таким образом, при высоких сдвиговых напряжениях происходит течение вязкой жидкости, содержащей незначительное количество частиц твердого наполнителя.

Результаты проведенных исследований показывают, что при

$$Bi = \frac{2\sigma_Y}{R} \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right|^{-1} = 0.1$$

значении числа Бингама

величина

среднерасходной вязкости превышает  $\mu_{pl}$  на 15%. Однако с ростом значений числа Бингама  $Bi$  различие в значениях  $\bar{\mu}$  и  $\mu_{pl}$  увеличивается: при  $Bi = 0.38$  величина среднерасходной вязкости в два раза превышает  $\mu_{pl}$ , а при  $Bi = 0.76$  – в десять раз. Отметим, что при  $Bi \rightarrow 1$  величина среднерасходной вязкости  $\bar{\mu} \rightarrow \infty$ . При течении вязкопластической жидкости с числом Бингама  $Bi < 0.10$ , неньютоновские свойства течения проявляются незначительно и, с точностью достаточной для инженерных расчетов, можно рассматривать течение ньютоновской жидкости с вязкостью  $\mu_{pl}$ .

# **Численное моделирование начального этапа развития конвективного течения над круглой пластиной**<sup>16</sup>

**Сбоев И.О., Рыбкин К.А., Кучинский М.О., Гончаров М.М.**

Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь

e-mail: ivan-sboev@yandex.ru

Интерес к исследованию процессов возникновения и развития одиночных осесимметричных конвективных факелов, создаваемых локализованными неоднородностями температуры, обусловлен актуальностью проблемы эволюции крупномасштабных гидродинамических течений. Помимо фундаментального интереса такие исследования имеют практическое значение в задачах охлаждения микроэлектронных устройств. Однако, механизм потери устойчивости механического равновесия на начальном этапе формирования конвективного факела вблизи подогреваемой пластины конечных размеров до сих пор недостаточно подробно представлен в литературе.

В рамках настоящей работы численно решалась нестационарная трехмерная задача свободной тепловой конвекции, описываемая стандартной системой уравнений Навье-Стокса с заданными граничными условиями. К настоящему времени подробно изучена эволюция полей скорости и температуры в горизонтальной и вертикальной плоскостях над нагревателем. Составлена карта конвективных режимов для различных размеров компактного нагревателя, перепада температуры и значений числа Рэлея.

Проведенные численные расчеты позволили описать механизм развития неустойчивости температурного поля в области локализованного подогрева, и выделить в жидкости несколько режимов развития теплового пограничного слоя. Промежуточные результаты моделирования удалось верифицировать натурным экспериментом.

---

<sup>16</sup> Исследование проведено в рамках Программы поддержки Научных школ Пермского края (грант № С-26/788), а также при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-31-00165

# Математическое моделирование движения двухфазного потока в шнековой осадительной центрифуге

Соломаха А.Е., Брендаков В.Н.

Национальный исследовательский Томский государственный университет, г. Томск

e-mail: solomahaartem@yandex.ru

Центрифугирование – процесс разделения многофазного потока (напр., твёрдые частицы в жидкости – суспензии) на фракции различной плотности при помощи центробежных сил. Центрифугирование осуществляется при помощи аппаратов, называемых центрифугами.

Осадительные центрифуги имеют широкое применение в различных отраслях: в лабораторной практике, в сельском хозяйстве для очистки зерна, выдавливания мёда из сот, выделение жира из молока, в производстве для обогащения руд, разделения изотопов урана в газообразном соединении гексафторида урана.

В работе рассматривается численное моделирование течения суспензии на основе системы уравнений Навье - Стокса, записанных в цилиндрической системе координат. На первом этапе моделирования была решена гидродинамическая задача течения вязкой несжимаемой жидкости в круглой трубе.

В работе численная модель, представляющая собой систему дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, аппроксимировалась методом конечных разностей. Полученная система алгебраических уравнений решалась численно на разнесённой разностной сетке при заданных начальных и граничных условиях. Неявная схема уравнений записывалась в «дельта» форме и решалась с помощью численного метода продольно-поперечной прогонки.

Вторым этапом работы была оценка поведения ансамбля частиц в процессе разделения, времени осаждения твердых частиц различного диаметра, их пройденное расстояние и траектория осаждения.

Созданная математическая модель течения двухфазного потока в шнековой осадительной центрифуге может быть использована при конструировании новых устройств подобного типа и оптимизации режимов работы существующих аппаратов.

# **Восприимчивость к зажиганию древесных материалов при воздействии на них модельных очагов горения различной интенсивности<sup>17</sup>**

**Тараканова В. А., Касымов Д. П.**

Томский государственный университет, г. Томск

e-mail: veronika.tarakanova@mail.ru

В настоящее время имеется потребность в проведении экспериментальных исследований по изучению пожароопасных свойств древесных строительных материалов. В данной работе для оценки тепловых параметров образцов древесины используется метод ИК-диагностики.

В строительстве в качестве несущих конструкций, как правило, используют древесину хвойных пород, а как отделочные материалы применяется древесина лиственных пород.

Для исследования вероятности воспламенения образцов древесины, применяемой в строительстве, при воздействии на них очага горения различной интенсивности была модернизирована установка, позволяющая проводить исследования по зажиганию тлеющими частицами напочвенного покрова [1]. Схема установки и методика проведения эксперимента представлена в работе [2].

Из экспериментальных данных была получена критериальная зависимость показателей пожарной опасности рассматриваемых материалов от типа материала и внешних условий, а также определены времена задержки зажигания и скорость обугливания.

## **Список литературы**

- [1] Filkov A., Kasymov D., Zima V., Matvienko O. Experimental investigation of surface litter ignition by bark firebrands / AIP Conference Proceedings 1698, 060004 (2016). doi: 10.1063/1.4937859.
- [2] Kasymov D. P., Agafontsev M. V., Perminov V. V., V. Tarakanova A. Studying the resistance to fire of wood under the different type of thermal impact while forest fires // Proc. SPIE 10833, 24th International Symposium on Atmospheric and Ocean Optics: Atmospheric Physics, 1083356 (2018); doi: 10.1117/12.2504454.

---

<sup>17</sup> Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18-79-00232).

# Задача о распространение пламени по неподвижной аэровзвеси угольной пыли<sup>18</sup>

Тарасенко Ю. А.

Томский государственный университет, г. Томск

e-mail: yuliannatarasenko@mail.ru

В докладе представлена физико-математическая модель и результаты расчета задачи распространения пламени по аэровзвеси угольной пыли с неоднородным распределением частиц пыли по пространству. Постановка задачи основана на работе [1] и является ее продолжением. В работе представлены результаты параметрических расчетов, в которых определена зависимость скорости распространения фронта горения по аэровзвеси угольной пыли от состава пыли.

Из расчетов определено, что механизм реагирования газозвеси при нагреве протекает стадийно: после разогрева частиц начинается выделение газообразных летучих компонент, далее одновременно идет нагрев и начало экзотермических химических реакций между газообразными летучими компонентами и окислителем, после этого начинается гетерогенная реакция на поверхности частиц и интенсивная химическая реакция в газе со сгоранием газообразных летучих. Для крупных частиц после прогрева и выделения газообразных летучих компонентов температуры газозвеси недостаточно для протекания интенсивной химической реакции в газе, что приводит к уменьшению скорости распространения фронта горения по аэровзвеси угольной пыли при увеличении размера частиц. Из расчетов получено, что кривые зависимости скорости распространения фронта горения от размера или от массовой концентрации частиц имеют нелинейный вид, для кривых существуют экстремумы.

## Список литературы

1. Моисеева К. М., Крайнов А. Ю. Влияние состава угольной пыли на скорость распространения фронта горения по аэровзвеси с неоднородным распределением частиц// Компьютерные исследования и моделирование, 2018. Т. 10, № 2, С. 221–230.

---

<sup>18</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ проект № 17-79-20011.

# О результатах исследования проницаемости углеродного нанополотна

Уколов А. В., Бубенчиков М. А., Уколов Р.Ю.

Национальный исследовательский Томский государственный  
университет, Томск

e-mail: [Ukolov33@gmail.com](mailto:Ukolov33@gmail.com)

Современными способами получения гелия являются криогенная дистилляция и напорная адсорбция. Наряду с этими методами в последние годы активно развивается мембранная технология, обладающая очевидными преимуществами перед классическими методами. Данная работа направлена на оценку применимости наноструктурированных материалов в качестве мембран в установках выделения легких компонент из природного газа.

Уравнения динамики перемещающейся молекулы запишем в стандартной форме в виде второго закона Ньютона, который в проекциях на оси декартовых координат имеет вид:

$$m \frac{du}{dt} = \sum_{j=1}^{N_p} X_j, \quad m \frac{dv}{dt} = \sum_{j=1}^{N_p} Y_j, \quad m \frac{dw}{dt} = \sum_{j=1}^{N_p} Z_j \quad (1)$$

Потенциал взаимодействия наночастица – молекула выбирается в форме, предложенной В.Я. Рудяком и С.Л. Краснолуцким [1]:

$$\Phi_9^3(\rho_j) = \Phi_9(\rho_j) - \Phi_3(\rho_j) \quad (3)$$

Далее будем считать, что структура составлена алмазными нанонитями, а каждая нить в свою очередь составлена сферическими частицами с пересекающимися объемами. Пересечения выполнены таким образом, чтобы впадины между частицами могли быть скомпенсированы двойной массой в местах пересечения сфер.

Для полотна, выполненного из алмазных нанонитей диаметром 0,7 нм, показано, что не происходит накопления газовых компонент в потенциальных ямах структуры. В этом случае, сетка из алмазных нитей может выполнять функцию основного разделительного слоя нанопористой мембраны.

## Список литературы

[1] Rudyak V.Y. The calculation and measurements of nanoparticles diffusion coefficient in rarefied gases / V.Y. Rudyak, S.L. Krasnolutskiy // J. Aerosol Science. – 2003. – Vol. 34, suppl. 1. – P. 579–580.

# Решение задачи горения аэровзвеси порошка бора в замкнутом объеме<sup>19</sup>

Хакимов А.

Томский государственный университет, г. Томск  
e-mail: akniet.khakimov@mail.ru

В докладе представлена физико-математическая модель и результаты расчета задачи о сжигании аэровзвеси порошка бора в замкнутом сферическом объеме. Целью расчетов являлось определение влияния начальной температуры и состава порошка бора на режимы окисления и горения.

Физико-математическая постановка задачи основывалась на данных о стадийности и кинетике процесса [1]. Полагалось, что процесс окисления и горения аэровзвеси порошка бора протекает в два этапа. На первом этапе, при низкой температуре частицы бора окись бора находится в конденсированном состоянии и образует на поверхности частицы пленку. В этом случае учитывались реакции окисления частицы с образованием окисла и испарения оксидного слоя. Реакция испарения определялась по давлению насыщенных паров вокруг частицы и диффузии окислителя к поверхности окисного слоя. Реакция образования оксида бора определялась диффузией окислителя к поверхности частицы бора через окисный слой. Реакций в газовой фазе нет. На втором этапе, при температуре частицы бора выше температуры кипения окиси бора, полагалось, что продукты реакции образуются в газообразном виде, окисной пленки нет, частица бора горит аналогично частице угля. Кинетика горения соответствовала данным [1]. Решение выполнено с использованием схемы Рунге-Кутты-Мерсона с автоматическим выбором шага. Показано, что при относительно низкой начальной температуре смеси на поверхности частицы формируется окисный слой. Реакции в газовой фазе не начинаются. При высоких начальных температурах формируется тонкий окисный слой, который мгновенно испаряется при достижении температуры испарения оксида бора, и частица бора быстро сгорает с образованием газообразных продуктов реакции.

## Список литературы

1. Ягодников Д. А. Воспламенение и горение порошкообразных металлов. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана. 2009. – 432 с.

---

<sup>19</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ проект № 17-79-20011.

# Дискретная модель горения многокомпонентной безгазовой смеси<sup>1</sup><sub>20</sub>

Худякова Т.И., Прокофьев В.Г.

ТГУ, ТНЦ СО РАН Томск

e-mail: [tai\\_hudikova@mail.ru](mailto:tai_hudikova@mail.ru)

Методом численного моделирования проведен анализ влияния размера элементарной ячейки на скорость горения многокомпонентной безгазовой смеси TI+AL и NI+AL с упорядоченным распределением ячеек и случайным распределением. Цель исследования – изучение влияния размера элементарной ячейки на режим и скорость горения системы. Постановка задачи включала уравнения теплопроводности и химической кинетики и решалась численно методом покоординатного расщепления с использованием неявной схемы. Расчеты показали, что с увеличением размера элементарной ячейки время горения значительно увеличивается. В рамках решения данной задачи, была проведена серия расчетов для больших значений коэффициента теплопроводности, что соответствовало введению в систему металлических частиц-ячеек. При анализе и обработке полученных данных расчетов было обнаружено, что с увеличением размера элементарной ячейки время горения значительно уменьшается, т.е. увеличивается средняя скорость горения образца. Также, для данного набора параметров системы наблюдался так называемый эстафетный режим горения, наиболее ярко проявляющийся при больших размерах элементарной ячейки.

## Список литературы

- [1] Гринчук П. С. Горение гетерогенных систем со стохастической пространственной структурой вблизи пределов распространения. // Инженерно-физический журнал. – 2013. – Т.86, №4. С 819-830.
- [2] Гринчук П. С., Рабинович О. С. Перколяционный фазовый переход при горении гетерогенных смесей. // Физика горения и взрыва. – 2004. – Т.40, № 4. С 41-53.
- [3] Мержанов А.Г. Термически сопряженные процессы самораспространяющегося высокотемпературного синтеза // Докл. РАН.–2010.–Т.434, №4.–С. 489–492.

---

<sup>20</sup><sub>1</sub> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 19-03-00081.

# Неструктурированные сетки в задачах однофазной фильтрации

Цай И.С.

НИ ТГУ, Томск

e-mail: ilya\_1\_3\_5@mail.ru

Данная работа посвящена построению математической модели движения несжимаемой жидкости в недеформируемой среде. Программа, созданная в работе, позволяет получать распределение давления жидкости в зависимости от времени, что в дальнейшем помогает анализировать динамику течения. Полученные расчеты могут быть полезны для разработки месторождения жидкости.

Для построения математической модели мы обратимся к методу контрольного объема. Для реализации данного метода:

Уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho m}{\partial t} + \text{div} \rho \underline{w} = q,$$

Закон Дарси - дифференциальное уравнение движения флюида.

$$\vec{W} = \frac{k_a}{\mu} \vec{\nabla} P$$

Для проведения численных расчетов была подготовлена компьютерная программа на языке C++.

## Список литературы

[1] Басниев К.С., Дмитриев Н.М., Каневская Р.Д., Максимов В.М., “Подземная гидромеханика”, Москва : Институт компьютерных исследований, 2006.

[2] Патанкар С., “Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости”, Нью-Йорк, 1980.

# Проницаемость слоистой мембраны нитрида бора молекулами газовой смеси

Бубенчиков А.М., Челнокова А.С.

Томский государственный университет, г. Томск  
e-mail: smolina-nyuta@mail.ru

Классическая теория проникновения вещества через пористые структуры хорошо развита и имеет широкое применение в технике. Однако диффузионный перенос вещества не годится для описания переноса в сверхтонких слоях, поскольку в последнем случае мы имеем дело с масштабами, на которых перестают работать модели сплошной среды. Статистическая физика в виде уравнений Больцмана для функций плотности вероятности распределения случайных величин имеет проблемы с замыканием этих уравнений и удовлетворением граничных условий для рассматриваемых функций. Поэтому в рамках данного подхода пока не удалось решить ни одной полезной задачи о мембранном транспорте вещества.

В настоящей работе строится теоретическая модель прохождения атомов и молекул различных газовых компонент через поры соответствующего размера в пленке нитрида бора [1,2]. Для изучения проницаемости такой системы достаточно рассмотреть движение молекул через один прямоугольный туннель. Характер разделения метан–гелиевой смеси анализируется на основе атом–атомных взаимодействий. Используя преобразование Бокса–Мюллера, случайным образом задаются компоненты вектора скорости молекул газа, имеющих распределение Максвелла. Далее, статистическими расчетами определяется проницаемость в отношении отдельных компонент, а также степень разделения бинарной смеси газов. Расчеты показали низкую проницаемость метана и гелия через структуры и селективность около двух единиц.

## Список литературы

[1] Покропивный В.В., Ивановский А.Л. Новые наноформы углерода и нитрида бора // Успехи химии. 2008. 77 (10). С. 899–937.

[2] Ultrathin high-temperature oxidation-resistant coatings of hexagonal boron nitride / Zheng Liu, Yongji Gong, Wu Zhou, Lulu Ma, Jingjiang Yu, Juan Carlos Idrobo, Jeil Jung, Allan H. MacDonald, Robert Vajtai, Jun Lou, Pulickel M. Ajayan // Nature Communications. 2013. V. 4. Article number: 2541.

# **Исследование нелинейного поведения растворов полимеров в режиме больших периодических деформации<sup>21</sup>**

**Черпакова Н.А.**

АлтГТУ, Барнаул; АлтГПУ, Барнаул  
e-mail: nadja-cherpakova@mail.ru

Изучение поведения течений растворов полимеров в области нелинейной вязкоупругости позволяет более точно оценить адекватность реологических моделей и подробнее описать реологические свойства материала [1].

В работе для анализа свойств материалов в области нелинейной вязкоупругости применяется модифицированная реологическая модель Виноградова-Покровского [2].

В процессе моделирования при увеличении амплитуды деформирования было обнаружено, что нелинейный отклик уже не имеет форму правильной гармоника и на левом фронте явно наблюдается появление «ступеньки». При сравнении теоретической и экспериментальных зависимостей наблюдается количественное совпадение расчётной зависимости с экспериментальными данными. При построении фигур Лиссажу нелинейность в режиме больших периодических деформаций, проявляется как искажение эллипса в фигуры различной формы, что так же соответствует и другим модельным представлениям [3], и экспериментальным данным.

## **Список литературы**

- [1] Ильин С. О.; Малкин А. Я.; Куличихин В. Г. Высокомолекулярные соединения. 2014, 56(1), 99.
- [2] Мерзликина Д.А.; Пышнограй Г.В.; Пивоконский Р.; Филип П. Инженерно-физический журнал. 2016, 89(3), 643.
- [3] Pivokonsky R.; Filip P.; Zelenkova J. Polymers. 2017, 9, 205

---

<sup>21</sup>\* Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 18-31-00030 мол\_a

## **Критические условия зажигания напочвенного покрова из хвои кедра в результате аккумуляции тлеющих частиц, образующихся в результате природных пожаров<sup>22</sup>**

**Шевлякова А.А., Касымов Д.П.**

Томский государственный университет, г. Томск

e-mail: anechka\_98-@mail.ru

В последние несколько десятилетий изучению проблемы пожаров, возникающих в результате горящих и тлеющих частиц, посвящено значительное число работ. Несмотря на это, данное научное направление все еще находится на стадии активного изучения и имеет большое количество не решенных задач. В частности, до сих пор остаются неизвестными критические условия воспламенения напочвенного покрова в результате аккумуляции частиц в зависимости от их размера, формы и условий окружающей среды.

В связи с этим, целью представленной работы является изучение в лабораторных условиях процесса накопления тлеющих веточек различного размера и их взаимодействия с лесным напочвенным покровом. Для оценки времени зажигания напочвенного покрова, продолжительности пламенного горения и тления, а также критической величины теплового потока, достаточной для устойчивого воспламенения ЛГМ, была сконструирована экспериментальная установка, позволяющая осуществлять аккумуляцию частиц на напочвенный покров.

В результате определялась вероятность воспламенения напочвенного покрова хвои сосны, подверженного тепловому потоку от частиц различного размера и диаметра в условиях подвода ветра и в его отсутствии. Совместно с вероятностью воспламенения в зависимости от количества частиц, необходимых для зажигания, будет определён критический тепловой поток, производимый частицами.

---

<sup>22</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-07-00548.

**СЕКЦИЯ  
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ  
МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ  
МЕТОДЫ И ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ  
ВЫЧИСЛЕНИЯ**

# Классификатор Байеса для непараметрического распределения

Алимбаева Е. А., Федорова О.П.

Национальный исследовательский Томский государственный университет, Томск

e-mail: alimb97@mail.ru

В работе рассматривается задача автоматического распознавания изображения с целью его классификации. В том случае, когда количество классов известно заранее, возможно использование классификатора Байеса [1]. Если распределение признаков известно, то разделяющие функции имеют следующий вид:

$$g_i(x) = p(\omega_i)P(\omega_i).$$

Представляется интерес построения разделения в случае если распределение признаков оценивается по выборке. В работе используется тождество для совместного распределения [1]:

$$P(x) = P(x_1) \prod_{i=2}^d P(x_{i-1}, \dots, x_1).$$

Предполагая, что  $x_i$  зависит только от  $x_{i-1}$ , мы переходим к марковской цепи первого порядка:

$$P(x) = P(x_1) \prod_{i=2}^d P(x_{i-1}).$$

Распределение признаков приближается по обучающей выборке сплайнами, сохраняющими интеграл [2]. В этом случае полученное приближение можно рассматривать как некоторое распределение, близкое к распределению, представленному выборкой. Методика построения разделяющих функций апробируется на модельных данных и применяется к классификации изображений.

## Список литературы

- [1] Дуда Р. Распознавание образов и анализ сцен / Р. Дуда, П. Харт. – М.: Мир, 1976. – 511 с.
- [2] Федорова О. П. Об одном подходе к приближению функции сплайнами // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2008. – № 2(3). – С. 61–66.

# Конечно-разностная схема "Ромб" для численного решения уравнения конвекции-диффузии

Атамасова Е.С., Лаева В.И.

НИ Томский Государственный Университет, Томск  
e-mail: katyfka.22@mail.ru

В данной работе рассматривается численное решение одномерной задачи конвекции-диффузии, полученное с помощью неявной разностной схемы «Ромб» [1]. Данная схема имеет ряд достоинств. Так, с её помощью появляется возможность одновременного нахождения функции температуры и теплового потока. Кроме того, уравнение аппроксимируется в пределах одной ячейки, что упрощает использование схемы для тела, состоящего из материалов с различными теплофизическими характеристиками.

Разностная схема имеет гибридный принцип построения:  $\alpha=0,5$  в зоне гладких решений ( $|T_{i+1} - T_i| \leq \delta(T_i + T_{i+1}))$  и  $\alpha=1$  в зоне больших градиентов ( $|T_{i+1} - T_i| > \delta(T_i + T_{i+1}))$ ,  $0 \leq \delta \leq 1$ . Проведённые исследования показали, что при  $\alpha=0,5$  схема условно монотонна, абсолютно устойчива по начальным данным и имеет первый порядок аппроксимации по времени и второй – по пространственной переменной. При  $\alpha=1$  схема монотонна, абсолютно устойчива по начальным данным, но при оценке погрешности выяснилось, что происходит потеря порядка аппроксимации.

Проведено сравнение численных расчётов и аналитических решений уравнения конвекции-диффузии с постоянными коэффициентами.

## Список литературы

[1] Гаджиев А. Д. Неявный конечно-разностный метод «Ромб» для численного решения уравнений газовой динамики с теплопроводностью. / Гаджиев А. Д. , Писарев В.Н.//Журнал вычислительной математики и математической физики, 1979. - Т.19. С.1288 – 1303.

# Применение сингулярного разложения для сжатия изображений и решения плохообусловленных систем линейных уравнений

Афанасьева А.А., Старченко А.В.

Томский государственный университет, Томск

e-mail: [afanaseva\\_anyutka@inbox.ru](mailto:afanaseva_anyutka@inbox.ru)

Работа посвящена применению сингулярного разложения матриц (SVD – Singular Value Decomposition) [1] для сжатия изображений и решения почти сингулярных систем линейных уравнений.

Для сжатия изображений применяется усеченная сингулярная декомпозиция. Показана возможность существенного сокращения требуемого объема памяти для хранения изображений без потери качества их представления. На конкретных примерах матриц малого порядка представлены основные этапы SVD-разложения и на примере сжатия изображения показано, что SVD - удобный способ для сжатия с минимальной потерей информации.

Рассматриваются некоторые программные реализации SVD на языке Fortran, для которых показано влияние ошибки округления при сингулярном разложении матрицы Гильберта небольшой размерности (~14). Для решения почти сингулярных систем линейных уравнений используется усеченная сингулярная декомпозиция [2] исходной матрицы коэффициентов и процедура исключения Гаусса для решения приведенной системы линейных уравнений с матрицей, имеющей меньшее значение числа обусловленности. Этот метод не требует дополнительных сведений о свойствах матрицы. В качестве примеров используются системы с Гильбертовой матрицей [2], проведены исследования с помощью процедур SVD и исключения Гаусса, данный численный опыт показал хорошую точность предлагаемой схемы решения.

## Список литературы

- [1] Деммель Дж. Вычислительная линейная алгебра .М.:Мир, 2000. 430 с.
- [2] Volokh K. Pin-Pointing Solution of Ill-Conditioned Square Systems of Linear Equations/K.Volokh, O.Vilnay// Applied Mathematics Letters, - 2000 - №13. – P.119-124

# Моделирование течения вязкопластичной жидкости в изотермических условиях <sup>23</sup>

Басалаев А. В., Рыльцев И. А.

Томский государственный университет, г. Томск

e-mail: stalak133@mail.ru

Рассматривается стационарное течение вязкопластичной жидкости в L-образном канале. Математическую основу задачи образуют уравнения движения и неразрывности, записанные в безразмерных переменных. Реологическое поведение жидкости описывается законом Шведова-Бингама. Жидкость поступает в канал через входное сечение с единичным расходом, при этом профиль скорости совпадает с профилем, характерным для установившегося течения рассматриваемой жидкости в плоском бесконечном канале. В выходном сечении используются «мягкие» граничные условия.

Задача решается с помощью конечно-разностного метода. Для нахождения стационарных полей скорости и давления в расчетных узлах разнесенной сетки используется метод установления и алгоритм SIMPLE [1]. Для использования технологии сквозного счета в потоке с квазитвердыми ядрами применяется метод регуляризации исходного реологического уравнения [2].

Получены распределения продольной скорости течения вязкопластичной жидкости для различных значений определяющих безразмерных параметров. Выделены зоны одномерного и двумерного течений в канале. Показаны распределения квазитвердых ядер в потоке и проанализированы условия их возникновения.

## Список литературы

- [1] Patankar S. V. Numerical Heat Transfer and Fluid Flow. – New York.: Taylor & Francis, 1980. – 214 p.
- [2] 2. Frigaard I. A., Nouar C. On the usage of viscosity regularization methods for visco-plastic fluid flow computation // J. Non-Newtonian fluid mech. – 2005. – V.127, I. 1. – Pp. 1–26.

---

<sup>23</sup>1 Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 18-38-00259 мол\_а.

# Использование метода к-ближайших соседей для решения задач обнаружения огня в режиме реального времени <sup>24</sup>

Бочков В. С., Катаева Л. Ю.

ФБГОУ ВПО НГТУ им. Р.Е. Алексеева, Нижний Новгород

e-mail: vladimir2612@bk.ru

В работе описано решение задачи классификации визуальных объектов с использованием метода к-ближайших соседей. Разработаны методы нахождения необходимого и достаточного размера тренировочного датасета для работы алгоритма в режиме реального времени. Произведен сравнительный анализ подходов к оптимизации данных.

В работе учитывается степень изменчивости цвета пикселя на протяжении нескольких кадров с помощью скользящего среднего первого второго порядков по цветовым параметрам пикселя. В качестве параметров для конкретных изображений были выбраны следующие:

1. Отношение цветности пикселей в области

$$PRGB = \sum_{i,j} \left\{ \begin{array}{l} 1, R_{i,j} > G_{i,j} > B_{i,j} \\ 0, \neg(R_{i,j} > G_{i,j} > B_{i,j}) \end{array} \right\} / m \cdot n$$

2. Среднее значение компонент цвета в регионе

$$MR = \sum_{i,j} R_{i,j} / m \cdot n, \quad MG = \sum_{i,j} G_{i,j} / m \cdot n, \quad MB = \sum_{i,j} B_{i,j} / m \cdot n$$

3. Усредненные значения скользящего среднего второго

$$MDMA(\alpha, \beta) = \sum_{i,j} DMA(P_{i,j}, \alpha, \beta) / m \cdot n$$

порядка в целевой области:

Установлено, что самые высокие показатели точности распознавания получены в среднем при использовании алгоритма поиска одного ближайшего соседа. С ростом количества ближайших соседей точность падает, однако заметно пропорциональное точности увеличение ошибки ложно-негативного срабатывания и падение ошибки ложно-положительного срабатывания. Первую ошибку можно компенсировать запоминанием позиции огня на 1-2 кадра, в виду того, что низовой лесной пожар относительно медленно распространяется, в то время как со вторым типом ошибок можно бороться только улучшением алгоритма классификации. Поэтому оптимально использовать алгоритм поиска 7 соседей

# **Упаковка оболочки из композитного материала и ее развертывание в условиях невесомости<sup>25</sup>**

**Бузмакова Г.В.**

ПГНИУ, г. Пермь

e-mail: galina\_buzmakova@bk.ru

Актуальность проводимого исследования обусловлена возможностью использования [1] крупногабаритных оболочечных конструкций (рефлекторы космических телескопов и антенн, зеркальные и линзовые концентраторы солнечного излучения, модули жизнеобеспечения космических экипажей и т.п.) в условиях космоса. В работе рассматривается (альтернативный пневматическому) способ упаковки и развертывания оболочечной конструкции с использованием упругого шарнира. Основной идеей такого способа является накопление упругой энергии в шарнирах при упаковке и высвобождение ее при развертывании. Оболочка конструируется из упругих элементов, соединенных упругими шарнирами (предусматривается изготовление шарниров из частично отвержденного препрега). Материал шарниров считается гиперупругим, его свойства описываются потенциалом Neo Hookean. Эффективные свойства шарниров зависят от степени отверждения препрега и определяются численно- экспериментальным методом на примере цилиндрического четырехшарнирного короба. Найденные материальные характеристики гиперупругого шарнира используются для исследования упаковки и развертывания различных оболочечных конструкций. Приводятся оценки параметров состояния рассматриваемых конструкций: необходимые усилия упаковки, величина упругой деформации шарниров, напряжения в шарнирах и элементах конструкции.

Работа выполняется в рамках проекта по гранту РФФИ № 17-41-590649.

## **Список литературы**

[1] Pestrenin V. M., Pestrenina I. V., Rusakov S. V., Kondyurin A. V. Deployment of large-size shell constructions by internal pressure // Mechanics of Composite Materials.– 2015.–Vol. 51.–N5.–P. 629-636.

---

<sup>25</sup><sub>1</sub> Работа выполняется в рамках проекта по гранту РФФИ № 17-41-590649

# Методика численного решения задачи о зажигании металлизированного твердого топлива тепловым потоком <sup>26</sup>

Гойко В.Л., Порязов В.А.

Томский государственный университет, г. Томск

e-mail: [poryazov@ftf.tsu.ru](mailto:poryazov@ftf.tsu.ru)

В работе рассматриваются одномерные нестационарные процессы при зажигании и горении металлизированного твердого топлива. Записывается система уравнений, состоящая из: уравнения переноса тепла в твердом топливе; уравнения глубины разложения твердого топлива; уравнений энергии для газовой фазы и частиц алюминия; уравнение выгорания окислителя в газовой фазе; уравнения сохранения массы газовой фазы; уравнения сохранения массы частиц; уравнения движения частиц, уравнения числа частиц в единице объема, уравнения состояния идеального газа. На поверхности топлива ставятся граничные условия сохранения потоков энергии и массы компонентов. Выражения, применяемые для вычисления силы взаимодействия частиц с газом, коэффициентов сопротивления и теплоотдачи, скорости изменения массы частиц алюминия, а также уравнения, определяющие текущие значения размеров частиц и алюминия в частице описаны в работе [1].

Представлен алгоритм и численная методика расчета зажигания и выхода на стационарный режим горения металлизированного твердого топлива под действием теплового потока от внешнего источника.

## Список литературы

[1] Порязов В. А., Крайнов А. Ю. Математическая модель и расчет нестационарной скорости горения металлизированных твердых ракетных топлив // Вестн Том. гос. ун-та. Математика и механика. 2017. № 50. С. 99–111.

---

<sup>26</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 18-38-00533 мол\_а.

# Математическое моделирование и численное исследование процесса самоочищения речного водоема

Давыдов А. С., Михайлов М.Д.

Томский Государственный Университет, Томск

e-mail: afoniashka@gmail.com

Работа посвящена численному изучению процесса самоочищения речного водоема с помощью математической модели. Это позволяет определять возможность очистки от загрязнений водного потока. Предлагается модификация моделей Моно и Стритера-Фелпса [1] в двумерном приближении:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial t} + U \frac{\partial L}{\partial x} + V \frac{\partial L}{\partial y} = -K_1 L - \frac{\mu_{max} XL}{Y(K_L + L)} + d_L \left( \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \right), & \frac{\partial X}{\partial t} + \\ U \frac{\partial X}{\partial x} + V \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\mu_{max} XL}{K_L + L} + d_X \left( \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} \right), & \frac{\partial D}{\partial t} + U \frac{\partial D}{\partial x} + \\ V \frac{\partial D}{\partial y} = K_1 L - K_2 D - \frac{\mu_{max} XL}{K_L + L} + d_D \left( \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \right), & \end{cases} \quad (2)$$
$$L(x, y, 0) = 0; X(x, y, 0) = X^0(x, y); D(x, y, 0) = 0, \quad (2)$$

$$\{L(0, y, t) = L^0(0, y), X(0, y, t) = D(0, y, t) = 0, t <$$

$$5 \text{сут. } L(0, y, t) = X(0, y, t) = D(0, y, t) = 0, t \geq 5 \text{сут.} \quad (3)$$
$$\left. \frac{\partial L}{\partial x} \right|_{x=A} = \left. \frac{\partial X}{\partial x} \right|_{x=A} = \left. \frac{\partial D}{\partial x} \right|_{x=A} = 0; \left. \frac{\partial L}{\partial y} \right|_{y=0,B} = \left. \frac{\partial X}{\partial y} \right|_{y=0,B} = \left. \frac{\partial D}{\partial y} \right|_{y=0,B} =$$

0,

где-дефицит кислорода,  $d_L, d_X, d_D$ -коэффициенты диффузии,  $U, V$ -компоненты вектора скорости течения реки,  $x \in [0, A]; y \in [0, B]$ .

Для численной реализации задачи (1)-(3) используются явный и неявный разностные методы. Исследуются вопросы аппроксимации, устойчивости и сходимости методов [2]. Даются сравнения результатов численных расчетов, которые представлены в виде одномерных и двумерных графиков.

## Список литературы

- [1] Абеляшев Д.Г. Математическое моделирование процессов самоочищения реки с использованием модификации моделей Герберта и Стритера-Фелпса // Седьмая Сибирская конференция по параллельным и высокопроизводительным вычислениям / Под ред. проф. А.В. Старченко. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2014. С. 89-96.
- [2] Меркулова Н.Н., Михайлов М.Д. Методы приближенных вычислений. Томск: Издательский дом ТГУ, 2014.

# Численное решение уравнения теплопроводности

Драморецкий А. С., Гольдин В. Д.

e-mail: anton970501@gmail.com

Рассматривается численное решение двумерного уравнения теплопроводности в прямоугольной области. Теплофизические параметры предполагаются постоянными. На верхней и правой границе области осуществляется теплообмен по закону Ньютона с окружающей средой, имеющей более высокую температуру. На этих границах выставляются граничные условия 3-го рода, на других границах - условие теплоизоляции [1].

Для численного решения задачи на равномерной регулярной сетке строится разностная схема, имеющая 2-й порядок аппроксимации как внутри области, так и на её границе [2]. Рассматривается 3 варианта реализации метода расщепления [3]: 1) локально одномерная схема; 2) метод стабилизирующей поправки Дугласа-Рекфорда; 3) метод стабилизирующей поправки с итерациями на каждом шаге по времени. Написаны программы для получения решения по каждому из вариантов. Полученные результаты для локально одномерной схемы сравниваются с аналитическим решением. Анализируется погрешность численного решения в зависимости от шагов сетки. В рассмотренной задаче все варианты метода расщепления показывают близкие результаты.

Рассмотрено применение метода расщепления для задачи, имеющей неоднородное стационарное решение. Показано, что стационарное решение, полученное по локально одномерной схеме, зависит от шага по времени и при больших его значениях может существенно отличаться от аналитического.

## Список литературы

1. Лыков А. В. Теория теплопроводности/ А. В. Лыков. – М. Высшая школа, 1967. – 600 с.
2. Меркулова Н. И. Методы приближенных вычислений/ Н. И. Меркулова, М. Д. Михайлов; под ред. А. В. Старченко. – Томск: Изд. дом ТГУ, 2014. – 763 с.
3. Марчук Г.И. Методы расщепления/ Г. И. Марчук. – М. Наука, 1988. – 264 с.

# Моделирование дефектов провода

Исмагилов А. Н., Ли К.

Национальный исследовательский Томский политехнический университет, Томск

e-mail: ani16@tpu.ru

При производстве кабельных изделий могут появиться дефекты (трещины, инородные включения, вмятины, порезы и т.д.). Наличие дефектов приводят к изменению емкости [1]. В работе рассматривается провод как часть любого кабельного изделия. Необходимо изучить степень влияния изменения геометрических параметров дефектов на изменения значения емкости.

Для моделирования дефектов с известными геометрическими размерами удобно использовать компьютерное моделирование в среде COMSOL Multiphysics [2]. Модель провода – цилиндрический конденсатор, одной обкладкой которого являлась жила провода, а второй – электрод, охватывающий внешнюю поверхность изоляции. Для расчета моделируется взаимодействие между электрическим полем с напряжением  $U$  и проводом, жила которого заземлена. Значение емкости провода  $C$  связано с энергией электрического поля конденсатора [3]. После преобразования емкость можно рассчитать по формуле

$$C = \frac{1}{U^2} \int_V \bar{D} \bar{E} dV$$

где  $D$  – индукция и  $E$  – напряженность электрического поля.

Таким образом, математическое моделирование – эффективный инструмент, позволяющий провести исследования влияния изменения геометрических параметров дефектов на значение емкости провода и минимизировать материальные затраты на создание набора образцов, создавать сложные дефекты с заданными параметрами.

## Список литературы

- [1] Кабели и провода. Основы кабельной техники/ Под редакцией И.Б. Пешкова. – М.: Энергоатомиздат, 2009. – 470 с.
- [2] Рюмкин А.В., Вавилова Г.В. Моделирование влияния дефектов провода на его ёмкость// Сб. трудов IX Всероссийской научно-практ. конф. молодых ученых с международным участием «Россия молодая». Кемерово: Изд-во КузГТУ, 2017. С. 122–125.
- [3] Говорков В.А. Электрические и магнитные поля/ В. А. Говорков. – 3-е изд., перераб. и доп. – Москва: Энергия, 1968. – 487 с.: ил.

# Решение задачи оптимального финансирования инвестиционного проекта симплекс-методом

Каратаева Е. А., Шельмина Е. А.

ТГУ, Томск

e-mail: nebosolnze@gmail.com

Математические модели экономических задач – это совокупность средств: уравнений, комплексов математических зависимостей, знаковые логические выражения, отображающие выделенные для изучения характеристики объекта, реальные взаимосвязи и зависимости экономических показателей.

По используемому математическому аппарату модели могут подразделяться на модели линейного программирования, модели выпуклого программирования, модели динамического программирования и др.

Под инвестиционным проектом будем понимать любое вложение денег с целью получения прибыли в будущем. Примерами инвестиционных проектов могут служить закупка производственного оборудования, вложение денег в банк под процент, приобретение ценных бумаг и т.п.

Математическая постановка задачи оптимального финансирования проекта такова: минимизировать целевую функцию при заданных ограничениях и условиях. Это задача линейного программирования, легко решаемая на ПЭВМ [1].

Суть симплекс-метода решения задачи линейного программирования заключается в нахождении начального допустимого плана и в последующем улучшении плана до достижения максимального (или минимального) значения целевой функции в данном выпуклом многогранном множестве или выяснения неразрешимости задачи [2].

## Список литературы

- [1] Аксень Э. М. Современные методы финансового анализа / Э. М. Аксень. – Минск: ИНФРА-М, 2005. – 269 с.
- [2] Решение задачи линейного программирования. Симплекс метод [Электронный ресурс] // Мир математики. – Электрон. дан. – URL: <https://matworld.ru/linear-programming/solving-linear-programming-problem.php> (дата обращения: 22.03.2019).

# Численное исследование влияния режима охлаждения тигля на формы фронтов кристаллизации в методе Бриджмена-Стокбаргера<sup>[1]</sup>

Бердников В.С., Кислицын С.А., Митин К.А.

ИТ СО РАН, НГТУ, Новосибирск

e-mail:100pch@mail.ru

Численно исследован процесс кристаллизации веществ методом Бриджмена-Стокбаргера. Опускание тигля из горячей зоны печи имитировалось заданием скорости перемещения точки перехода от заданной температуры на верхней части внешней поверхности тигля к области с градиентом температуры. Расчеты проведены при различных сочетаниях пар веществ тигель-расплав. Одним из важнейших применений метода Бриджмена-Стокбаргера является выращивание кристаллов кремния [1] в графитовых тиглях. Из множества марок графита подходящей для выращивания качественных кристаллов кремния является МПГ-6 [2]. Проведены исследования кристаллизации воды, как жидкости – имитатора расплавов, обладающих инверсной зависимостью плотности от температуры. Задачи решались в сопряженной двумерной осесимметричной постановке методом конечных элементов с учетом выделения теплоты кристаллизации. Использованы адаптивные треугольные сетки отслеживающие положение фронтов кристаллизации и оптимальное сгущение узлов в расчетных областях. Показано, что при одинаковых скоростях опускания тиглей пространственные формы течений и формы фронтов кристаллизации зависят от теплофизических свойств расплавов и стенок тиглей.

## Список литературы

[1] *Непомнящих А.И., Пресняков Р.В., Антонов П.В., Бердников В.С.* Влияние скорости вращения тигля на рост и макроструктуру мультикристаллического кремния // Неорганические материалы. 2014, Т.50, №12. С. 1281-1286.

[2] *Станкус С.В., Савченко И.В., Агажанов А.Ш. и др.* Теплофизические свойства графита МПГ-6 // Теплофизика высоких температур. 2013. Т. 51, №2. С. 205-209.

<sup>1</sup>

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 18-38-00790 мол\_а.

# Разработка математической и физической моделей гидравлического испытательного стенда

Кириллова В. И., Спасенко В. С.

Томский политехнический университет, г. Томск

e-mail: kirillova\_vi-1995@mail.ru

Решение задач повышения надежности технических систем всегда являлось актуальным. В последнее время в связи с расширением технологических возможностей данных систем исследованиям в сфере повышения их надежности уделяется особое внимание [1].

Одним из направлений исследований, в связи со сложностью технических систем и невозможностью проведения над ними экспериментов, является моделирование, как математическое, так и физическое.

Задача данного исследования, стоящая перед авторами, состояла в создании математической и физической моделей гидравлического стенда. Для решения поставленной задачи:

- разработана структурная блок-схема привода испытательного стенда, состоящая из гидравлического бака, аксиально-поршневого насоса, гидромотора, эксцентриккового механизма, плунжерной пары, предварительно поджатого шланга (гидравлической пружины);
- разработана математическая модель стенда и проведено численное моделирование;
- создана физическая модель стенда и проведенные эксперименты.

Данные физического эксперимента регистрировались мобильным диагностическим комплексом «Виброрегистратор» [1].

Сравнение данных исследования математической и физической моделей гидравлического испытательного стенда позволило доказать адекватность математической модели и определило возможность применения созданной модели для дальнейших исследований стенда.

## Список литературы

[1] Гаврилин А.Н., Мойзес Б.Б., Черкасов А.И. // Конструктивные методы повышения виброустойчивости металлорежущего оборудования. Контроль. Диагностика. 2013. № 13. С. 82 – 87.

[2] Gavrilin A, Moyzes B, Cherkasov A, Mel'nov K and Xiaoliang Zhang. Mobile Complex for Rapid Diagnosis of the Technological System Elements // MATEC Web of Conferences. 2016. V. 79. art. no. 01078. DOI: 10.1051/mateconf/20167901078

# Численное моделирование ультразвукового волновода методом частиц<sup>27</sup>

Кузорова А.Е., Суханов Д.Я.

Томский государственный университет, Томск

e-mail: Ang\_kuz93@mail.ru

Предлагается численная модель акустических процессов в твёрдых телах на основе массива частиц в кубической объёмно – центрированной решётке. Взаимодействие частиц описывается зависимостью силы притяжения от расстояния между частицами. Численное моделирование акустических процессов позволяет предсказать прохождение ультразвуковых сигналов через различные структуры и определить их резонансные частоты [1–2]. Мы предлагаем моделировать акустические процессы, представляя твердые тела в виде массива частиц, расположенных в кубической объёмно-центрированной кристаллической решетке [3]. Зависимость силы взаимодействия частиц от расстоянии определяется по формуле (1):

$$F(x) = \begin{cases} k \left(1 - \frac{d}{x}\right) \left(\sqrt{2} - \frac{x}{d}\right)^2 & \text{if } (x < d\sqrt{2}) \\ 0 & \text{if } (x \geq d\sqrt{2}) \end{cases} \quad (1)$$

где  $d$  – расстояние между взаимодействующими частицами, коэффициент  $k$  подбирается исходя из типа материала и направления в кристалле.

## Список литературы

- [1] Коробов А.И., Карабутов А.А., Сапожников О.А., Ультразвуковые волны в твердых телах: ФФ. МГУ, 2011. – 34 с.
- [2] Кривцов А.М., Кривцова Н.В. Метод частиц и его использование в механике деформируемого твердого тела // Дальневосточный математический журнал. 2002. №2. С. 254–276.
- [3] Ашкрофт. Н., Мермин. Н. Физика твёрдого тела: учебник для вузов.:М.:Мир.1979.Ч.1.

---

<sup>27</sup> Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках проекта «Создание высокотехнологичного комплекса ультразвуковой хирургии» (Уникальный идентификатор проекта RFMEF157517X0163)..

# Применение нейронных сетей для криптоанализа шифра Плейфера

Куттубек кызы Г. Старченко А. В.

Томский государственный университет, Томск

e-mail: wendiya97@gmail.com

Нейронные сети являются математической моделью способной имитировать процесс работы головного мозга, а их обучение — это многопараметрическая задача нелинейной оптимизации. Симбиоз криптографии и машинного обучения создает множество интересных задач одной из которых является оценка коэффициента пригодности текста. Нейронные сети не подходят для задачи подбора ключей при дешифровании текста, но вполне способны решить проблему с оценкой пригодности дешифрованного текста [1].

В данной работе описан принцип работы многослойного перцептрона [2] для оценки пригодности варианта дешифрованного текста. Процесс обучения нейронной сети будет основываться на методе градиентного спуска. Процесс выбора наилучшей оценки пригодности дешифрованного текста производится с помощью алгоритма «имитации отжига», который представляет собой общий метод решения задачи глобальной оптимизации. Алгоритм основывается на имитации физического процесса, который происходит при кристаллизации вещества, в том числе при отжиге металлов. В качестве примера был проведен криптоанализ Шифра Плейфера с помощью разработанной компьютерной реализации программы дешифрования на языке программирования PascalABC.

## Список литературы

[1]. Neural Cryptanalysis of Classical Ciphers[Электронные ресурсы]:Proceedings of the 19th Italian Conference on Theoretical Computer Science/Urbino –Электрон. журн.–2018.–URL:<http://ceur-ws.org/Vol-2243/paper10.pdf>

[2]. Применение искусственных нейронных сетей и системы остаточных классов в криптографии [Электронный ресурс] // Физматлит: [библиогр. указ.] / сост.: Червяков Н.И., Галушкин А.И., Евдокимов А.А., Лавриненко И.Н., Москва, [ : 2012– ]. URL: [https://www.rfbr.ru/rffi/ru/books/o\\_1782393#1](https://www.rfbr.ru/rffi/ru/books/o_1782393#1) (дата обращения: 22.03.2019).

# Решение NP-полных задач на графах

Лаевский В. М., Зюзьков В. М.

ТГУ, Томск

e-mail: [vladimirm195@gmail.com](mailto:vladimirm195@gmail.com)

Большинство алгоритмов, используемых на практике являются полиномиальными (работают за полиномиальное время). Существуют также задачи, которые можно решить, но не удастся сделать это за время  $O(n^k)$ , где  $k$  – некоторая константа. Задачи поиска, разрешимые с помощью алгоритмов с полиномиальным временем работы (класс P), считаются легко разрешимыми или простыми, а задачи поиска, для которых неизвестен полиномиальный алгоритм решения, но не доказано его отсутствие (класс NP), – являются трудно разрешимыми или сложными. Максимально сложные задачи класса NP принадлежат классу NP-полных задач. В некотором смысле все эти задачи эквивалентны (сводятся одна к другой); более того, если бы какая-то NP-полная задача решалась за полиномиальное время, то и вообще все NP-задачи решались бы за полиномиальное время. Чтоб доказать это, используют *сведёния* (reductions), которые переписывают одну задачу в терминах другой. Вопрос, верно ли  $P \neq NP$ , с момента своей постановки в 1971 году стал одним из самых трудных в теории вычислительной сложности. Многие важные задачи легко формулируются на языке графов [1, 2].

В ходе выполнения данной работы в системе Mathematica были изучены и реализованы следующие приближенные, жадные и эвристические алгоритмы и методы на графах: алгоритм поиска вершинного покрытия, алгоритмы построения минимального покрывающего дерева Краскала и Прима, метод динамического программирования для задачи о рюкзаке с повторениями и без повторений, алгоритм для задачи 3-выполнимости булевых формул, генетический алгоритм для задачи коммивояжера [1, 2].

## Список литературы

1. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р. Алгоритмы: построение и анализ. – М.: МЦНМО, 2001. – 960 с.
2. Дасгупта С. Пападимитриу Х., Вазирани У. Алгоритмы. – М.: МЦНМО, 2014. – 320 с.

# **Система контекстного поиска изображения на основе нейронных сетей**

**Морозов А.К., Федорова О.П.**

НИ ТГУ, г. Томск

e-mail: morozoffandrey-m@ya.ru

Распознавание изображения является очень популярной задачей для современных ЭВМ. С этими задачами лучше всего справляются сверточные нейронные сети. Нейронные сети – одно из направлений в разработке искусственного интеллекта. Идея заключается в том, что бы смоделировать максимально близко работу системы головного мозга человека – а именно способность обучаться, выявлять и исправлять ошибки, основываясь на предыдущем опыте. Человек может сравнивать изображения и выделять на них объекты визуально, на интуитивном уровне. Однако для машины изображение – набор данных, который требует сложной обработки. Есть определённые методы для сравнения изображения основанные на сопоставлении знаний об изображении в целом. В своей работе я рассмотрю несколько методов распознавания изображения, опишу представление сверточной нейронной сети «CNN».

Сверточная Нейронная Сеть - это класс обучаемых архитектур нейронных сетей, используемых во многих областях, таких как распознавание изображения, аннотация изображений, поиск изображений и т.д. CNN обычно состоит из нескольких слоев обработки, каждый из которых включает линейные, а также нелинейные операторы, которые «обучаются» совместно, для решения конкретного задания. В ходе эксперимента была написана программа на языке Python, которая выявляет вектора признаки и сравнивает их по косинусному расстоянию.

## **Список литературы**

- [1] Mirmehdi, Xie, and Suri: Handbook of texture analysis. ,2012. – С. 14–15
- [2] Novak, Shafer: Computer vision and pattern recognition ,1992
- [3] Wang, Wu, and Yang: Histograms of oriented displacements , 2010

# Численное решение уравнения переноса

Новохатний Д. Ю., Данилкин Е. А.

Томский Государственный Университет, Томск

e-mail: [daniil212504@gmail.com](mailto:daniil212504@gmail.com)

В работе рассмотрен алгоритм численного решения уравнения переноса. Уравнение переноса является одним из фундаментальных в математической физике и широко используется, например, при моделировании переноса примеси в атмосфере. Численное решение уравнения переноса осуществляется на основе метода конечного объема [1, 2]. При дискретизации используются явная аппроксимация по времени, противопоточная, MLU или QUICK схема для аппроксимации конвективного слагаемого.

Построенный алгоритм решения одномерного уравнения переноса реализован программно на языке C++. Верификация программы проведена на задаче решения невязкого уравнения Бюргерса, которое имеет решение типа «бегущей волны». На модельных задачах с начальными условиями «прямоугольник», «ступенька вниз» и «треугольник» проведено сравнение используемых схем аппроксимации конвективного слагаемого.

Целью работы является знакомство с численными методами решения дифференциальных уравнений и изучение влияния выбранной схемы аппроксимации конвективного слагаемого на численное решение.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 19-71-20042.

## Список литературы

1. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости: Пер. с англ. / С. Патанкар. – М. : Энергоатомиздат, 1984. – 149 с.
2. Старченко А.В. Численное моделирование турбулентных течений и переноса примеси в уличных каньонах / А.В. Старченко, Р.Б. Нутерман, Е.А. Данилкин - Томск : Издательство Томского государственного университета, 2015. - 252 с.

# Совмещение изображений на основании Shearlet-декомпозиции

Потоцкая А.А.<sup>1,2</sup>, Старченко А.В.<sup>1</sup>, Захарова А.А.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Томский государственный университет, Томск

<sup>2</sup>Национальный институт прикладных наук Руана, Руан

e-mail: bubuzyonok@yandex.ru

Целью совмещения изображения является выравнивание двух или более изображений одной и той же сцены, снятых в разное время, с разных точек зрения и / или с разных датчиков. Из-за актуальности и широкой применимости данная задача была исследована во множестве работ и с использованием различных методов, результаты которых часто зависят от конкретного применения.

Методы, основанные на вейвлетах, хорошо себя зарекомендовали в решении задачи совмещения изображений [1]. При разложении в соответствии с дискретным вейвлет-алгоритмом, изображение редуцируется до наиболее важных характеристик, которые легче сопоставить. Однако известно, что вейвлеты являются изотропными объектами, то есть они не эффективно представляют изображения, имеющие характерные особенности, такие как краевидные элементы.

Существует много анизотропных обобщений вейвлетов. В частности, shearlets [2] дают быстрое, оптимизированное и зависящее от направления разложение изображений, которое позволяет разработать надежный алгоритм совмещения изображений.

В работе рассмотрен алгоритм совмещения изображений на основании Shearlet-декомпозиции. В данном алгоритме в качестве пространства поиска рассматриваются вращение и сдвиг изображений. Отображение между изображениями ищется на основании отображения между ключевыми признаками изображений. Ключевые признаки выделяются с помощью Shearlet-декомпозиции.

## Список литературы

- [1] Netanyahu N. S., Le Moigne J., Masek J. G. Georegistration of Landsat data via robust matching of multiresolution features //IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing. – 2004. – Т. 42. – №. 7. – С. 1586-1600.
- [2] Kutyniok G., Labate D. Introduction to shearlets //Shearlets. – Birkhäuser Boston, 2012. – С. 1-38.

# Методы сопряженных градиентов решения задачи оптимизации

Рагзина А.В. , Лаева В.И.

НИ ТГУ, Томск

e-mail: [ragzina1999@mail.ru](mailto:ragzina1999@mail.ru)

В работе рассматриваются три варианта метода сопряженных градиентов [1,2] для решения многомерных задач безусловной оптимизации:

$$f(\underline{x}),$$

где  $f$  – скалярная, дифференцируемая, ограниченная снизу функция.

Идея метода сопряженных градиентов основана на стремлении минимизации квадратичной функции за конечное число шагов не превышающее размерности пространства  $R^n$ , при условии, что поиск ведется вдоль сопряженных относительно гессиана направлений. Так как достаточно большой класс целевых функций может быть представлен в окрестности точки минимума своей квадратичной аппроксимацией, метод также применяется для решения задач минимизации общего вида. При этом он перестает быть конечным, строящиеся направления перестают быть сопряженными относительно какой-либо матрицы, а задачи одномерной минимизации на каждой итерации приходится решать численно.

Цель данной работы состоит в получении численных решений задачи минимизации для различных целевых функций. Построены алгоритмы методов Флетчера-Ривса, Полака-Рибьера, Дениэла, проведен их сравнительный анализ для квадратичных и не квадратичных функций. В двумерном случае при численных расчетах производится наглядная графическая демонстрация траектории построения последовательности точек от начальной до искомой точки локального минимума.

## Список литературы

- [1] Сухарев А.Г. Курс методов оптимизации: Учеб. пособие / А.Г. Сухарев, А.В.Тимохов, В.В. Федоров. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 368с.
- [2] Аттетков А.В. Методы оптимизации Учеб. для вузов / А.В. Аттетков, С.В. Галкин, В.С. Зарубин. – М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2003. – 269с.

# Задача о стабильном браке <sup>28</sup>

Русанова Д.С., Зюзьков В.М.

ТГУ, Томск

e-mail: rusanchik0411@gmail.com

Решается следующая задача. Есть  $n$  мужчин и  $n$  женщин. Каждый из них оценивает лишь людей противоположного пола. Предположим, что у каждого мужчины есть список женщин, упорядоченный по убыванию их «привлекательности» для него. Аналогично, у каждой женщины есть упорядоченный по тому же принципу список мужчин.

Требуется создать  $n$  пар, состоящих в стабильных браках, где отсутствуют мужчины и женщины, не состоящие в браке, но предпочитающие друг друга. Т.е., если мужчина предпочитает другую женщину своей жене, то она не предпочитает его, и, наоборот, если женщина предпочитает другого мужчину своему мужу, то он не предпочитает её. Алгоритм решения этой задачи известен [1].

1. Мужчины делают предложение наиболее предпочитаемой женщине.
2. Каждая женщина из всех поступивших предложений выбирает наилучшее и отвечает на него «возможно», а на все остальные отвечает отказом.
3. Мужчины, получившие отказ, обращаются к следующей женщине из своего списка предпочтений, а мужчины, не получившие отказ, ничего не делают.
4. Если женщине пришло предложение лучше предыдущего, то прежнему претенденту она говорит «нет», а новому «возможно». Если хуже, то отказывает новому претенденту.

Шаги 1–4 повторяются, пока у всех мужчин не исчерпается список предложений, в этот момент женщины отвечают «да» на те предложения «возможно», которые у них есть в настоящий момент.

В терминах теории графов эта задача формулируется как задача нахождения совершенного паросочетания в двухдольных графах [2].

Написана программа на языке Wolfram для решения данной задачи в системе Mathematica.

## Список литературы

[1] Кнут Д. Э.. Устойчивые паросочетания и другие комбинаторные задачи. Введение в математический анализ алгоритмов. М.: МЦНМО, 2014. – 80 с.

[2] Дасгупта С., Пападимитриу Х., Вазириани У. Алгоритмы. – М.: МЦНМО, 2014. – 320 с.

# Неизотермическое течение степенной жидкости в трубе с внезапным сужением<sup>29</sup>

Рыльцева К.Е.

Томский государственный университет, Томск

e-mail: kiraworkst@gmail.com

Течение неньютоновской жидкости реализуется в различных технических приложениях, которые осуществляют транспорт жидких сред. Во многих случаях процесс протекает в неизотермических условиях в массопроводах с конструктивными элементами в виде скачка сечения, которые требуют особого внимания при организации эффективного производства.

В работе рассматривается ламинарное стационарное течение неньютоновской жидкости в трубе с внезапным сужением с учетом вязкой диссипации и зависимости реологических характеристик от температуры. Система основных уравнений включает уравнения движения, теплопроводности, неразрывности, записанные в переменных функция тока – вихрь и температура в цилиндрической системе координат. Реологические свойства среды определяются моделью Оствальда — де Виля, в которой учитывается зависимость эффективной вязкости жидкости от температуры. Стационарное решение задачи получено методом установления [1] с последующей реализацией конечно-разностного алгоритма, основанного на схеме переменных направлений [2]. Уравнения в разностном виде решаются методом прогонки [1].

В результате численных расчетов проведен количественный анализ структуры потока. Выполнена оценка влияния учета вязкой диссипации на кинематические характеристики потока. Представлены поля эффективной вязкости и температуры, характерные для ньютоновской, псевдопластичной и дилатантной жидкостей.

## Список литературы

- [1] Годунов С.К., Рябенский В.С. Введение в теорию разностных схем. М.: Физматгиз, 1962. 340 с.
- [2] Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. – М.: Наука, 1971. 553 с.

---

<sup>29</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 18-38-00259 мол\_а.

# Моделирование структурных преобразований в адгезионном слое в условиях Laminated Object Manufacturing

Сайфуллин Э. Р.

Томский государственный университет, Томск

e-mail: elmir.saifullin@mail.ru

Процесс LOM заключается в последовательном послойном соединении материалов с приложением внешней нагрузки. Изначально LOM применялся при изготовлении бумаги. Простота технического процесса привела к распространению технологии на производство строительных материалов, соединение керамических и металлических листов [1]. Усовершенствование технологического процесса сводилось к исследованию возможности применения новых материалов. Однако без внимания оставались процессы, происходящие в слое клея (если он использовался) или на границе раздела слоев [2]. В данной работе численно исследуются структурные превращения в слое клея между соединяемыми материалами. Математическая модель включает уравнение теплопроводности для каждого слоя материала и уравнение кинетики для степени структурных превращений, которое влияет на эффективные свойства адгезионного слоя. Для слоя клея уравнение теплопроводности принимает вид:

$$\frac{\partial \theta_G}{\partial \tau} = \frac{1}{\delta} \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ ((1-a) + \kappa a) \frac{\partial \theta_G}{\partial \xi} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ ((1-a) + \kappa a) \frac{\partial \theta_G}{\partial \eta} \right] \right) \quad (1)$$

Уравнение для степени структурных превращений включает прямую и обратную реакции, скорости которых зависят от температуры и напряжений, вызванных внешней нагрузкой.

$$\frac{da}{d\tau} = Y[\gamma_2(1-a)\varphi_2(\theta, \sigma) - \gamma_1 a \varphi_1(\theta, \sigma)] \quad (2)$$

Система уравнений замыкается соответствующими граничными и начальными условиями. Результаты численного исследования показывают, что в слое клея происходят структурные изменения, степень которых зависит от технологических параметров.

## Список литературы

- [1] Travitzky N. et al Reactive Synthesis of Ceramic-Metal Composites // Adv. Eng. Mater. 2018 V.20. P.1800324(1 – 15)
- [2] Knyazeva A., Travitzky N. Model of layers LOM-process // J. Phys.: Conf. Ser. 1045. 2018. P. 1 – 5.

# **Использование данных метеорологического и климатического прогноза при расчете индексов пожароопасности**

**Сваровский А. И., Барт А. А.**

Томский государственный университет, Механико-математический  
факультет, Томск  
e-mail: svarart@yandex.ru

Для территории Томской области проблема лесных пожаров является актуальной. Мониторинг позволяет выделить наиболее подверженные пожару территории, а прогнозирование пожаров дает возможность провести ряд мероприятий по предотвращению и/или сокращению негативных последствий.

Целью работы является - оценка возможности использования данных климатических прогнозов и среднесрочных прогнозов погоды при предсказании лесных пожаров.

В лесопожарных службах важнейшую роль играет своевременная и точная оценка лесной пожарной опасности. Оценка делается на основе индексов лесной пожарной опасности – математических формул, формализующих влияние осадков, температуры и влажности воздуха, влагосодержания лесных горючих материалов, деятельности человека, грозовую активность и другие факторы, и позволяющих прогнозировать возможность возникновения пожаров на определенной территории.

Были выполнены расчеты индексов Нестерова, Сверловой, KBDI и австралийского индекса пожароопасности для территории Томской области за период 2017-2018 года. Расчеты проводились на основе среднесрочных прогнозов погоды по модели ПЛАВ с пространственным разрешением  $0,186^\circ \times 0,225^\circ$  [1]. Рассчитанные значения индексов сопоставлялись с данными о зарегистрированных пожарах.

Были написаны скрипты, выполняющие манипуляции с данными, расчеты и визуализацию результатов.

## **Список литературы**

[1] Толстых М. А. Разработка многомасштабной версии глобальной модели атмосферы ПЛАВ / М. А. Толстых, Ж. Ф. Желен и др. // Метеорология и гидрология. – 2015.-№6. - С. 25-35.

# Сплайны эластичных функций

Сарватовский В. О.

НИ ТГУ, г. Томск

e-mail: svo451@mail.ru

Одной из характеристик, отражающих зависимость между экономическими показателями, является эластичность.

Эластичностью функции  $y = f(x)$  определяется по формуле [1,2]

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x} \right) = \frac{x}{y} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta y}{\Delta x} \right) = \frac{x}{y} \cdot y' \quad (1)$$

Такая функция является величиной безразмерной.

Пусть функция  $y(x)$  задана на сетке

$$\omega : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$$

таблицей своих значений  $y_i = y(x_i)$ ,  $i = \overline{0, N}$ .

В работе рассматривается задача гладкого восполнения эластичности этой функции в любой точке отрезка  $[a, b]$ . Предлагается два способа решения этой задачи.

1. Восстановить по данным таблицы кубический интерполяционный сплайн  $S(x, y)$  и вычислить его эластичность [3]

$$E_x(y) \approx E_x(S) = \frac{x}{S(x, y)} \cdot S'(x, y)$$

2. Если сетка  $\omega$  равномерная, заменить в (1) в каждом узле сетки производную по формулам численного дифференцирования, для

полученной сеточной функции  $E_{x_i}, i = \overline{0, N}$ , построить кубический сплайн  $S(E_x)$ .

Результаты тестовых расчетов показывают, что интерполяционный сплайн достаточно точно позволяет восстанавливать эластичность функции, заданной таблично.

## Список литературы

1. Кочетков А.А. Экономическая теория. М: Дашков и К, 2016.
2. Солодовников А.С. Математика в экономике. Ч. 2. Математический анализ. М.: Финансы и статистика, 2013.
3. Берцун В. Н. Сплайны сеточных функций. Томск: Изд-во «ТМЛ-Пресс», 2007.

# Методы искусственного интеллекта в компьютерной томографии

Семёнов Е. В.

НИ ТГУ, Томск

e-mail: [semyonov@math.tsu.ru](mailto:semyonov@math.tsu.ru)

В работе рассмотрены различные подходы к применению методов машинного обучения для нахождения единственного решения обратной задачи электроимпедансной томографии. Проведено сравнительное исследование качества обучения этих методов и возможности их применения к рассматриваемой задаче. Также проведено исследование влияния входных данных для каждого из методов, на точность найденного решения.

Входные данные были представлены значениями потенциала на электродах, измеренными при разной конфигурации входных и выходных электродов области исследования. Измерения, сделанные для неоднородной среды с зафиксированной проводимостью внутри, группировались по отдельным векторам, по которым в последствии проводилась настройка модели и определения качества полученных результатов.

Было выявлено, что для обучения модели было недостаточно предоставления данных одного измерения с фиксированной конфигурацией электродов, потому как наблюдалась зависимость результатов измерений различных областей, отличающихся друг от друга поворотом области на величину, кратную углу между центрами электродов, равномерно распределенных по поверхности.

# Параллельная реализация численного решения уравнения переноса

Смиян Н. С., Данилкин Е. А.\*

Томский Государственный Университет, Томск

e-mail: mr.turner.x@mail.ru

В работе проведено распараллеливание численного решения двумерного уравнение переноса, описывающего процесс распространения воздушной газообразной примеси. Численное решение осуществляется на основе метода конечного объема [1]. При дискретизации используются явная аппроксимация по времени, схема против потока для конвективных слагаемых и центрально разностная схема для диффузионных слагаемых. При численном решении использовались данные полей ветра над Томском и источник с постоянной интенсивностью в центре области исследования.

Распараллеливание проведено с использованием двух разных подходов, ориентированных на использование систем с общей и распределенной памятью. Разработка программной реализации поставленной задачи выполнена на языке программирования C++ с использованием библиотек MPI и OpenMP [2].

## Список литературы

1. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости: Пер. с англ. / М: Энергоатомиздат, 1984. - 149 с.
2. Старченко А.В., Берцун В.Н. Методы параллельных вычислений. / Томск: ТГУ, 2013. - 225с.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ № 19-71-20042.

# Методы штрафных функций решения задач условной оптимизации

Сысueva Я. М., Лаева В. И.

НИ ТГУ, Томск  
e-mail: sysueva.yaroslava@mail.ru

В работе рассматриваются методы штрафных функций [1,2] для решения задачи условной минимизации:

найти  $f(\underline{x})$ , (1)

где допустимое множество  $X$  представимо в виде системы функциональных равенств и неравенств

$$X = \{\square_i(\underline{x}) = 0, i = 1, 2, \dots, m; g_k(\underline{x}) \leq 0, k = 1, 2, \dots, l; \underline{x} \in R^n\}$$

(2)

$f, \square_i, i = \underline{1}, \underline{m}, g_k, k = \underline{1}, \underline{l}$  – непрерывные функции.

Метод штрафных функций основан на преобразовании исходной задачи с ограничениями в последовательность задач безусловной оптимизации. С помощью задающих ограничения функций (2) строится штрафная функция, которая добавляется к целевой функции  $f(\underline{x})$  исходной задачи. Штрафная функция должна быть близка или равна нулю в допустимых точках  $\underline{x} \in X$  и быстро возрастать либо при приближении изнутри к границе допустимого множества (внутренние штрафы или барьерные функции), либо при выходе за пределы (внешние штрафные функции). Таким образом, нарушение какого-либо ограничения становится не выгодным с точки зрения задачи безусловной минимизации. При соответствующих предположениях последовательность решений задач со штрафом при неограниченном возрастании штрафного параметра сходится к решению исходной задачи (1)-(2).

В данной работе для решения тестовых задач были построены алгоритмы с различными штрафными функциями и проведен их сравнительный анализ. Задачи безусловной минимизации решались методом сопряженных градиентов Дениэла и методом Ньютона с регулировкой шага [2].

## Список литературы

- [1] Базара М. Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы/ М.Базара, К.Шетти – М.: Мир, 1982. – 583 с.
- [2] Сухарев А.Г. Курс методов оптимизации/ А.Г.Сухарев, А.В.Тимохов, В.В.Фёдоров – М.: Физматлит, 2011. – 368 с.

# Быстрое преобразование Фурье

Трони́на А.А., Зю́зьков В.М.

ТГУ, Томск

e-mail: tronina.anya@gmail.com

Многочлен над кольцом  $\mathbf{R}$  вещественных чисел степени не выше  $n-1$  имеет вид  $A(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1}$ , и его можно задать одним из двух способов: 1) коэффициентами  $a_0, \dots, a_{n-1}$ ; 2) значениями  $A(x_0), \dots, A(x_{n-1})$  в любых  $n$  различных точках. Второе представление более удобное для умножения – если многочлены задаются своими значениями, то их умножение занимает линейное время. Многочлены обычно даны нам в виде списка коэффициентов, поэтому быстрое умножение будет в три этапа: сначала мы перейдем от коэффициентов к значениям в точках, т.е. вычислим значения многочлена в этих точках (преобразование Фурье). После этого найдем значения произведения в точках и, наконец, произведем интерполяцию, т.е. восстановим коэффициенты произведения по его значениям (обратное преобразование Фурье). Быстрое преобразование Фурье (БПФ) осуществляет первый и третий этапы за время  $O(n \log n)$ . Ускорение происходит за счет выбора специальных точек  $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ : это комплексные корни  $n$ -й степени из единицы [1]. Алгоритм БПФ произвел революцию в цифровой обработке сигналов.

Похожий алгоритм применим к кольцам  $\mathbf{Z}_m$  целых чисел по модулю  $m$ , где значение  $m$  такое, что в кольце существует примитивный корень  $n$ -й степени из единицы. В работе был рассмотрен случай, когда  $n$  – степень числа 2 и число  $m$  равно  $2^n$  [2, стр. 298–304].

Отметим, что в системе *Mathematica* имеется функция *Fourier* для БПФ в кольце  $\mathbf{R}$ . В данной работе реализованы в виде программ на языке *Wolfram* описанные рекурсивные алгоритмы для колец  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{Z}_m$ , причем для кольца  $\mathbf{R}$  программа работает и для многочленов с символьными коэффициентами, в отличие от функции *Fourier*.

## Список литературы

- [1] Дасгупта С., Пападимитриу Х., Вазирани У. Алгоритмы. – М.: МЦНМО, 2014. – 320 с.
- [2] Ахо У., Хопрофт Д., Ульман Д. Построение и анализ вычислительных алгоритмов. М : Издательство «Мир», 1979. – 536 с.

# Применение метода дискретных элементов для моделирования конфигурации засыпок из микросфер

Фисенко В. Н.

Институт теоретической и прикладной механики СО РАН,  
Новосибирск  
e-mail: vn\_fisenko@mail.ru

В данной работе рассматривается применение метода дискретных элементов [1] при моделировании процесса взаимодействия микросфер и генерации засыпки. Используется модель столкновения микросфер по аналогии с [2], основанная на прямом численном решении уравнений Ньютона, контактной теории Герца и введении демпфирующей силы.

Стабильность и точность моделирования определяется выбором шага по времени. Для определения оптимального шага по времени сначала была изучена продолжительность взаимодействия частиц при столкновении. Проведен расчёт для двух одинаковых частиц (минимального диаметра из имеющегося распределения), сталкивающихся с относительной скоростью в интервале от 0,5 до 1,5 м/с. Также получены результаты моделирования при различном выборе временных шагов для эталонного примера (27 частиц минимального диаметра, начальная скорость каждой частицы была случайным образом выбрана в интервале от 0.00 до 1,5 м/с, направление скорости также выбиралось случайным образом). Полная энергия гранул рассеивается, если расчёт стабилен, поэтому численная точность проверена путем сравнения изменения суммарной кинетической энергии гранул как в [3]. Таким образом определен оптимальный шаг по времени (для данного распределения частиц по размерам), при котором гарантируется стабильность вычислений при компромиссном времени вычислений.

Также была смоделирована тестовая засыпка для заданного распределения шаров по размерам, и проведен анализ геометрических параметров аналогично [4].

## Список литературы

- [1] P. A. Cundall and O. D. L. Strack, *Geotechnique* **29**, 47–65 (1979).
- [2] X. Fanga, J. Tanga, H. Luob. *Granular damping analysis using an improved discrete element approach*.
- [3] Y. Tsuji, T. Tanaka, T. Ishida, *Lagrangian numerical simulation of plug flow of cohesionless particles in a horizontal pipe*.

[4] A. S. Vereshchagin, V. M. Fomin, V. N. Zinovyev, I. V. Kazanin, A. Yu. Pak, V. A. Lebiga *Analysis of the Geometry of Reactor Filling with Sorbent from Microspheres and Granules.*

# Математическое моделирование процесса биологической очистки сточных вод с использованием некоторых модификаций Кенейла

Хуторная А.И., Михайлов М.Д.

ТГУ, Томск  
e-mail: anas-kh@yandex.ru

В статье [1] рассматривалась модель Кенейла, основанная на пищевой цепочке, состоящей из трех элементов: субстрата, бактерий, простейших. В данной работе описываются более сложные пищевые цепи, такие же, как в [2]. Вначале исследуется цепочка из одного вида загрязнения, двух популяций бактерий и одной простейшей, причем простейшая взаимосвязана только с одной из бактерий, а они, в свою очередь, «поедают» субстрат. Во второй цепочке добавляется еще один вид простейших. В этом случае каждая из них охотится только на определенный вид бактерий. Для получения дополнительного способа очистки используется биофильтр, основанный на подходе, предложенном К.Н. Корольковым [3]:

$$\frac{dL}{dt} = -kL,$$

где  $k$  – константа скорости изъятия субстрата,  $kL$  - масса органических веществ, адсорбированных активным илом в момент времени  $t$ . Вышеизложенный подход применяется к моделям, описываемым в [1]. Численная реализация указанных моделей выполняется с помощью неявного метода Эйлера. Исследуются вопросы аппроксимации, устойчивости и сходимости. Результаты численных расчетов представлены в виде графиков.

## Список литературы

- [1] Михайлов М.Д. Хуторная А.И. Математическое моделирование процессов биологической очистки сточных вод на основе модели Кенейла // Всероссийская молодежная научная конференция «Все грани математики и механики»: сборник статей. - Томск : Издательский Дом Томского государственного университета. - 2018. – 101-109 с..
- [2] Curds C.R. Computer simulations of some complex microbial food chains // Water Research. - 1974. - Vol.8, №10. - P.769-780.
- [3] Воронов Ю.В., Яковлев С.В. Биологические фильтры. - 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Стройиздат. – 1982. – 120 с.

# Модификация метода конечных элементов для решения уравнений переноса с преобладанием конвекции

Шерин К. В.

КемГУ, Кемерово

e-mail: sherinkonstantiv@gmail.com

Данная работа посвящена модификации классического метода Бубнова-Галёркина [1] для стабилизации решения уравнения конвекции-диффузии [2]. В качестве модификации рассматривается противопоточная схема Streamline-Upwind/Petrov-Galerkin (SUPG) [2], которая предлагает введение искусственной диффузии только в направлении потока. Рассматривается следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} = D \Delta c,$$
$$\int_{\Omega} w^* \left( \frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} - D \Delta c \right) d\Omega,$$

где  $u, v$  – компоненты вектора скорости,  $D$  – диффузия,  $w^*$  – весовая функция,  $c$  – искомая функция, аппроксимируемая через базисные функции  $N_j$ :  $c = \sum c_j N_j$ . Весовая функция модифицируется стабилизирующим параметром  $\tau$  [2] и имеет вид:

$$w_j^* = N_j + \tau c_i \frac{\partial N_j}{\partial x_i}.$$

Данная модификация позволяет устранить нефизичные осцилляции решения уравнения переноса с преобладанием конвективных членов над диффузионными. Например, с использованием данной схемы возможно получать решения системы уравнений Навье-Стокса для больших чисел Рейнольдса, что было проблемой классического метода.

## Список литературы

- [1] Conor J. J. Finite element techniques for fluid flow // J. J. Connor, C. A. Brebbia. – Newnes-Butterworth, 1976. – 320 p.
- [2] Thomas-Peter F. A Review of Petrov-Galerkin Stabilization Approaches and an Extension to Meshfree Methods // F. Thomas-Peter, G. Hermann. - Technische Universität Braunschweig, 2004. – 71 p.

# Метод кластеризации Forel при использовании $\lambda$ -расстояния

Автор Шихалева М. И.

Национальный исследовательский Томский государственный университет, Томск.

e-mail: [loonili@mail.ru](mailto:loonili@mail.ru)

Задачи кластеризации актуальны и практически значимы. При выявлении плохо разделенных кластеров, которые невозможно погрузить в гиперсферу, возникает вопрос, связанный с заданием расстояния так, чтобы геометрически близкие точки в пространстве признаков образовывали сгустки. Для этого используется эмпирическая гипотеза  $\lambda$  – компактности[1]. Эта гипотеза оперирует абсолютными значениями расстояний между векторами в пространстве признаков. Важную роль играет не только расстояние между точками, но и отношения между ними.

В работе [1] рассматривается гипотеза  $\lambda$  – компактности, которая позволяет модифицировать формулы расстояний между объектом и объектом и кластером. В настоящей работе рассматривается алгоритм Forel, в котором используется  $\lambda$  – расстояние. В этом методе количество кластеров определяется автоматически. Алгоритм реализован в «Matlab». На модельных данных показано, что при использовании  $\lambda$  – расстояния, количество выделенных кластеров уменьшается и точки, которые при задании евклидова расстояния образуют отдельный кластер «притягиваются» к близким кластерам, образуя объединения.

## Список литературы

[1] Загоруйко Н.Г. Прикладные методы анализа данных и знаний / Загоруйко Н.Г. – Новосибирск: Издательство Института математики, 1999. – 268 с

# Нейросетевые методы в MATLAB<sup>30</sup>

Ясинская Д. А., Федорова О. П.

Томский Государственный Университет, г. Томск

e-mail: [12345yasinskaya@gmail.com](mailto:12345yasinskaya@gmail.com)

В настоящее время искусственные нейронные сети широко используются для решения задач классификации, кластеризации, аппроксимации функций, предсказания, оптимизации и управления.

В работе решается задача параметрической идентификации нелинейной модели, с использованием нейронной сети МАТЛАБ[1].

Решение задачи проходит по этапам: подготовка входного и эталонного массивов для тренировки нейронной сети, создание трехслойной нейронной сети, обучение созданной сети, тестирование сети, моделирование сети.

Проводятся исследования точности идентификации параметров в зависимости от числа нейронов на слоях, точности решения задачи алгоритмом Левенберга-Макрквадта[2].

## Список литературы

1. Маслобоев Ю. П. Введение в Neural Network Toolbox [Электронный ресурс] - URL: <http://matlab.exponenta.ru/neuralnetwork/book1/task1/task1.php>
2. Гилл Ф. Практическая оптимизация : пер. с англ. В. Ю. Лебедев / Ф. Гилл, У. Мюррей, М. Райт ; под ред. А. А. Петрова – М.: Мир, 1985. – 188 с.

**СЕКЦИЯ  
ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И  
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ  
СТАТИСТИКА**

# "Последовательные процедуры оценивания параметров для авторегрессионной модели"<sup>31</sup>

Абдурасулзода Д., Емельянова Т.В.

НИ ТГУ, Томск

e-mail: [dilshod.abdurasulzoda@mail.ru](mailto:dilshod.abdurasulzoda@mail.ru)

В задачах исследования и прогнозирования временных рядов в динамических системах широко используется модели с непрерывным временем, описываемыми стохастическими дифференциальными уравнениями. Поскольку параметры такого рода уравнений неизвестны, то для основных задач прогнозирования требуется идентифицировать параметры.

Рассматривается задача оценивания параметров устойчивой авторегрессии с непрерывным временем вида:

$$dX_t^{(p-1)} = (\theta_1 X_t^{(p-1)} + \dots + \theta_p X_t) dt.$$

Для оценивания вектора неизвестных параметров

$$\theta = (\theta_1 \dots \theta_p)^T,$$

рассматривается два различных последовательных плана. Сравняются и исследуются свойства полученных оценок.

## Список литературы

- [1] Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов // М.: Наука, 1974
- [2] Конев В.В., Емельянова Т.В. О последовательном оценивании непрерывной авторегрессии порядка  $p$ // Автоматика и телемеханика – 2016.

# Построение хеджирующих стратегий для европейских опционов с потреблением

Борькина Э.Б., Пергаменщиков С.М.

Томский государственный университет

e-mail:elya.borkina@gmail.com

В работе рассматривается построения хеджирующих стратегий европейских опционов с потреблением для модели Блэка-Шоулса.

**Определение 1.** Моделью Блэка-Шоулса называется модель, в которой движения безрискового и рискованного активов описываются стохастическими дифференциальными уравнениями:

$$\begin{cases} dB_t = rB_t dt \\ dS_t = \mu S_t dt + \sigma dW_t \end{cases}$$

где  $r$  – процентная ставка,  $\mu$  – коэффициент изменчивости,  $\sigma > 0$  – волатильность,  $W_t$  – винеровский процесс.

**Задача:** Предположим, что на финансовом рынке динамика цен безрискового  $B = (B_t)_{0 \leq t \leq T}$  и рискованного  $\gamma = (\gamma_t)_{0 \leq t \leq T}$  активов задается  $(B, S)$ -моделью Блэка-Шоулса, где  $B_t = 1$ ,  $\mu = 0$ ,  $r = 0$ . Задана квадратично интегрируемая платежная функция  $f_T$ . Требуется построить самофинансируемую стратегию  $\pi$  такую, что  $X_T^{(\pi, C)} \geq f_T$  п.н., где  $C = (C_t)_{0 \leq t \leq T}$  – процесс оттока, капитал определяется формулой  $X_t^{(\pi, C)} = X_0^{(\pi, C)} + \int_0^t \gamma_u dS_u - \int_0^t dC_u$ .

## Список литературы

- [1] Липцер Р.Ш. Статистика случайных процессов/ Р.Ш. Липцер, А.Н. Ширяев – М. Наука, 1974. -
- [2] Ширяев А.Н. К теории расчетов опционов европейского и американского типов. II. Непрерывное время /А.Н.Ширяев, Ю.М. Кабанов, Д.О.Крамков, А.В.Мельников - Теория вероятностей и ее применения, 1994. Т.39.

# Статистическая оценка взаимосвязей различных факторов в прикладных задачах <sup>32</sup>

Вечирко К. В.

Томский государственный университет  
e-mail: vechirkokristina@gmail.com

Известно, что в Томский государственный университет подают документы абитуриенты из разных уголков нашей Родины, а также из стран ближнего и даже дальнего зарубежья. Ребята из Российской Федерации сдают единый государственный экзамен (ЕГЭ), а иностранцы – вступительные экзамены в ТГУ. Вступительные экзамены принимаются как в стенах университета, так и на выездных комиссиях. После зачисления студенты пишут тест, в рамках которого проверяются начальные знания поступивших. В нашей работе, мы попытались на основе статистического исследования выяснить есть ли связь между типом проведенного экзамена и его результатом.

На основе данных, взятых из ресурсов приемной комиссии некоторых факультетов ТГУ, статистическими методами (с помощью критерия  $\chi^2$  – Пирсона и др.) в исследовании выявляется наличие зависимости результата проверки знаний студента от места проведения экзамена, а так же типа экзамена.

## Список литературы

- [1] Ивченко Г.И. Математическая статистика: учебное пособие для вузов / Ивченко Г.И., Медведев Ю.И. – М.: Высшая школа, 1992. – 304 с.
- [2] Крамер Г. Математические методы статистики: пер. с англ. / Г. Крамер; под ред. А.Н. Колмогорова. – М.: Мир, 1975. – 648 с.
- [3] Аптон Г. Анализ таблиц сопряженности / Г. Аптон; пер. с англ. Ю.П. Адлера. М. : Финансы и статистика, 1982г. – 143 с.
- [4] <https://old.nsu.ru/tvims/chernova/ms/lec/node49.html>
- [5] <https://studfiles.net/preview/2114844/page:31>

# Оценка функции надежности для модели Кокса

Визгалов И.Е., Губин В.Н.

ТГУ, Томск

e-mail: [ilya.vizgalov@bk.ru](mailto:ilya.vizgalov@bk.ru)

Пусть время наступления системного события (отказа) – непрерывная случайная величина  $T_x$ , значение которой зависит от ряда факторов, описываемых вектором  $x$  и называемых ковариатами.

Функция надежности объекта определяется соотношением

$$S_x(t) = P(T_x > t) = 1 - F_x(t) \quad (1)$$

Пусть имеется выборка вида

$$(t_1, \delta_1, x^1), (t_2, \delta_2, x^2), \dots, (t_n, \delta_n, x^n), \quad (2)$$

где  $t_i = \min(T_i, C_i)$ ,  $T_i$  – время наступления отказа,  $C_i$  – время завершения наблюдения за  $i$ -м объектом до наступления его отказа.

Кумулятивная функция риска – мера, выражающая склонность объектов к отказам на промежутке времени  $[0, t]$ , которая выражается через функцию надежности следующим образом:

$$\Lambda_x(t) = \int_0^t \lambda_x(u) du = -\ln(S_x(t)),$$

где  $\lambda_x(t)$  интенсивность отказов.

Наиболее популярной вероятностной моделью, описывающей поведение функции надежности, является модель пропорциональных интенсивностей Кокса. Функция надёжности и интенсивность отказов для этой модели имеют вид [1,2]:

$$S_x(t) = (S_0(t))^{r(x, \beta)} \quad (3)$$

$$\lambda_x(t) = r(x, \beta) \lambda_0(t) \quad (4)$$

Задача состоит в идентификации модели (3) по выборочным данным (1): оценивание вектора регрессионных параметров  $\beta$  и базовой функции надежности  $S_0(t)$ .

## Список литературы

- [1] Антонов А.В., Никулин М.С. Статистические модели в теории надежности: Учеб. пособие. –М.: Абрис, 2012. -390 с.: ил.
- [2] Семёнова М.А. Разработка алгоритмического обеспечения и исследование обобщенных моделей пропорциональных интенсивностей: дис. Новосибирск, 2015.

# **Исследование статистически значимой зависимости коэффициента нефтенасыщенности пласта от других физических параметров месторождения**

**Еременко М.С.**

Национальный исследовательский Томский государственный университет, Томск

e-mail: [M.S.Eremenko@yandex.ru](mailto:M.S.Eremenko@yandex.ru)

В данной работе изучается проблема зависимости коэффициента нефтенасыщенности флюида от других параметров.

На основе предоставленных данных проведен анализ качественных и количественных характеристик нефти. Объем полученных выборок составил - 597 наблюдений из 105 месторождений.

Предлагается разработать методологию анализа данных с целью построения математических моделей выявленных зависимостей [1].

Расчеты проводятся в Excel и Matlab [2].

## **Список литературы**

[1] Ивченко Г.И. Математическая Статистика. Учебник – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2014. — 352 с.

[2] Сирота А.А. Методы и алгоритмы анализа данных и их моделирование в MATLAB. – СПб.: БХВ-Петербург, 2016. – 384 с.

# Оценивание непараметрической регрессии с полумарковскими шумами

Жуман А. Б.

НИ ТГУ, Томск

e-mail: aigerima\_z@list.ru

В работе рассматривается задача статистического оценивания неизвестной функции регрессии, описываемой стохастическим дифференциальным уравнением

$$dy_t = S_t dt + d\xi_t, \quad 0 \leq t \leq n, \quad (1)$$

где  $S(\cdot) \in \mathcal{L}_2[0,1]$  – 1-периодическая функция. Здесь  $(\xi_t)_{t \geq 0}$  – шумовой процесс, определяемый уравнением

$$\xi_t = \rho_1 w_t + \rho_2 z_t, \quad (2)$$

где  $(w_t)_{t \geq 0}$  – винеровский процесс,  $(z_t)_{t \geq 0}$  – составной пуассоновский процесс.

Для оценивания функции  $S$  в модели (1) применяется метод выбора модели на основе улучшенных взвешенных оценок наименьших квадратов [1]. Предлагается улучшенная процедура выбора модели и доказывается ее асимптотическая эффективность на основе оракульных неравенств для робастных квадратичных рисков, полученных в [2].

Проведено численное моделирование для сравнения эмпирических квадратичных рисков улучшенной оценки и оценки МНК из [1].

## Список литературы

- [1] Pchelintsev E.A., Pergamenschikov S. M. Oracle inequalities for the stochastic differential equations // Statistical Inference for Stochastic Processes. 2018. Vol. 21, № 2. P. 469-483.
- [2] Barbu V.S., Beltaief S., Pergamenschikov S. M. Robust adaptive efficient estimation for semi-Markov nonparametric regression models // Statistical Inference for Stochastic Processes. 2019. Vol. in press. P. 1-45.

# Об обнаружении "разладки"<sup>33</sup>

Клемешова А. И., Емельянова Т.В.

Томский государственный университет, Томск

e-mail: anya-3.4@mail.ru

Проблема обнаружения момента изменения статистических свойств наблюдаемого процесса является одной из классических задач математической статистики и известна в литературе как задача обнаружения разладки. Такие задачи возникают при обнаружении моментов изменения характеристик динамических систем, описываемых моделями авторегрессионного типа со случайными (дрейфующими) параметрами, а также при анализе эконометрических временных рядов. Для решения задач обнаружения разладки разработан ряд алгоритмов, при различных предположениях о модели наблюдаемого процесса.

В работе рассматривается задача обнаружения момента изменения параметров GARCH(1,1)-процесса. Параметры процесса предполагаются неизвестными. Предлагается последовательная процедура обнаружения момента разладки, использующая оценки, основанные на модификации метода наименьших квадратов со специальным образом подобранными весами. Приведены результаты моделирования.

## Список литературы

- [1] Сергеева Е. Е., Воробейчиков С. Э. Гарантированная оценка параметров и обнаружение момента разладки GARCH(1,1)-процесса, Вестник ТГУ, 3 (2011), 31-42.
- [2] Ширяев А.Н. Об оптимальных методах в задачах скорейшего

# **Статистическое оценивание взаимосвязи случайных величин на примере распространения туберкулеза**

**Костина А.В.**

Томский Государственный Университет, Томск

e-mail: [alishaqueenkost@gmail.com](mailto:alishaqueenkost@gmail.com)

Понятие случайные величины является одним из важнейших в теории вероятностей. Исследование зависимости между различными случайными величинами является одной из часто встречающихся задач математической статистики. Анализ взаимосвязи различных случайных величин необходим в различных областях, например, в экономике, демографии, медицине и др.

Статистическая зависимость между случайными величинами может быть выявлена различными способами, например, такими как: корреляционный анализ, регрессионный анализ, визуальный анализ, стохастический анализ, методами, основанными на ранжирование наблюдений.

Целью данной работы является исследование распространения туберкулеза в г. Томске и Томской области с использованием статистических данных. Данные взяты в медицинских учреждениях.

В курсовой работе представлено исследование статической зависимости по следующим признакам: пол, возраст, место проживания, был рецидив туберкулеза или не было и многие другие (в том числе медицинские анализы) с использованием критерия «Хи-квадрат», методов регрессионного анализа.

# Анализ финансового благополучия населения г. Томска на основе модели потребления Фишера.

Лисовая Д.Е.

Томский Государственный Университет, Томск  
e-mail: lisowaya.darja@yandex.ru

В данной работе изучается математическая модель потребления И. Фишера [1] и её применение к анализу и оценке финансового благополучия населения г. Томска. Используются статистические данные по показателям:

- инфляция с 2000 г. по 2019 г.;
- процентная ставка по депозитам с 2000 г. по 2019 г.;
- уровень среднемесячной заработной платы в г. Томск;
- уровень среднедушевого денежного дохода в г. Томск;
- уровень среднедушевых денежных расходов в г. Томск,

взятые с официальных источников: официальный сайт ЦБ РФ [3], официальный сайт Федеральной службы государственной статистики по Томской области [4].

На основе собранных данных построены статистические модели, описывающие динамику показателей и позволяющие прогнозировать их с вероятностью 95%.

Дополнительно был проведен социальный опрос о доходах и расходах работающего населения г. Томска.

В модели Фишера предполагается, что:

- 1) потребитель живет только в двух временных периодах (например, молодость и старость);
- 2) к концу второго периода потребитель тратит весь накопленный доход (не оставляет после себя никакого наследства);
- 3) потребитель знает заранее размер своего дохода как в первом периоде ( $Y_1$ ), так и во втором ( $Y_2$ );
- 4) потребитель может занимать средства или делать сбережения, т.е. потребление в каждом периоде может быть, как больше, так и меньше текущего дохода;
- 5) потребление в обоих периодах является нормальным благом;
- 6) процентная ставка по займам совпадает с процентной ставкой по сбережениям и является неизменной во времени.

Предлагается рассмотреть модификацию модели Фишера, в которой будут учтены динамики процентных ставок и инфляции.

Проводится сравнительный анализ “результатов модели” с реальными данными по доходам и потреблению.

## Список литературы

- [1] Шагас Н.Л., Туманова Е.А. Макроэкономика-2. - М.: Изд-во МГУ им. М. В. Ломоносова. 2006.
- [2] Магнус Я.Р., Катышев П.К., Пересецкий А.А. Эконометрика. Начальный курс: Учеб. - 6- изд., перераб. и доп. - М.: Дело, 2004.
- [3] Официальный сайт ЦБ РФ: <https://www.cbr.ru/>
- [4] Официальный сайт Федеральной службы государственной статистики по Томской области: <http://tmsk.gks.ru/>

# Статистическое моделирование курса криптовалют

Лоншаков К.П., Емельянова Т.В.

ТГУ, Томск

e-mail: [lonshakov199745@gmail.com](mailto:lonshakov199745@gmail.com)

**Криптовалюта** — разновидность цифровой валюты, создание и контроль за которой базируются на криптографических методах.

На фоне активной биржевой торговли криптовалютами и размышлений об их будущем естественным образом появляются исследования динамики их курса и попытки использования математических методов для прогнозирования будущих показателей. Большинство из них лежит в области анализа временных рядов и их финансового приложения – технического анализа.

Криптовалютные пары имеют достаточно динамичные взаимоотношения. Иногда они двигаются в одну сторону, а порой – в абсолютно противоположных направлениях.

В определенных случаях рынок создает ситуации, когда много криптовалют одновременно начинают движение вверх или вниз, в зависимости от происходящих событий, тогда как в других ситуациях те же криптовалютные пары показывают минимальную ценовую корреляцию или ее полное отсутствие.

В данной работе были вычислены ранговые коэффициенты корреляции Спирмена, Пирсона и Кэнделла показывающие зависимость между криптовалютами (биткоин и эфириум) и международными валютами (евро, доллар), а так же с помощью метода наименьших квадратов выделен тренд временного ряда.

## Список литературы

- [1] <https://bits.media/news/v-pogone-za-liderom-analiz-korrelyatsii-tsen-kriptovalyut/>
- [2] <https://ru.wikipedia.org/wiki/Криптовалюта>
- [3] Суслов В.И. Эконометрия. — М.: «СО РАН», 2005.

# Статистическая оценка влияния различных факторов на успеваемость студентов ММФ

Лужкова С.В., Якимова Д.М.

Национальный Исследовательский Томский государственный университет, г.Томск

e-mail: lana.luzhkova.2017@mail.ru, darya.yakimova.99@mail.ru

Группа студентов неоднородна, как и любая общественная структура. У каждого студента есть свое отношение к учебе. Высокие начальные показатели вовсе не гарантируют успешности дальнейшего обучения. Часть лидеров в дальнейшем смещается в группу «среднячков», а то и вовсе покидает вуз. Основной причиной таких изменений является утрата стимула к получению знаний, а результатом – ухудшение качественных характеристик специалиста и, как следствие, увеличение доли неэффективных общественных затрат. Однозначно ответить на вопрос, что определяет успеваемость студента невозможно. В нашей работе мы решили проверить влияет ли место проживания студента на его успеваемость на примере студентов бакалавриата 1-4 курсов ММФ. Для проверки гипотезы независимости уровня успеваемости от места жительства студентов использовался критерий  $\chi^2$ .

Статистика критерия имеет вид:

$$\chi^2_{(k-1)*(s-1)} = n * \left( \sum_{i,j=1}^{k*s} \frac{v_{ij}^2}{v_i*v_j} - 1 \right)$$

При уровне ошибки первого рода  $\alpha=0,05$ , установлено, что для студентов младших курсов (1 и 2) место жительства является фактором, влияющим на успеваемость, для студентов старших курсов ММФ, влияние этого фактора не установлено.

## Список литературы

- [1] Ивченко Г.И., Медведев Ю.И. Введение в математическую статистику. М.: Издательство ЛКИ, 2010.-600с.
- [2] Севастьянов Б.И. Курс теории вероятностей и математической статистики. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982.-256 с.
- [3] Интернет ресурсы.

# Статистическая идентификация динамических систем с малым шумом

Никифоров Н. И.

Национальный исследовательский Томский государственный  
Университет, г. Томск

e-mail: [Nikitanikiforov\\_97@mail.ru](mailto:Nikitanikiforov_97@mail.ru)

На плоскости имеется 3 детектора в точках  $\vartheta_j, j = 1, 2, 3$ .

Наблюдаемый процесс представлен в виде

$$dX_{j,t} = S(X_{j,t-\tau_j})dt + \varepsilon dW_{t,j}, X_{j,0} = x_0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

где  $W_{t,j}$  – независимые винеровские процессы, задержки  $\tau_j = \tau_j(\vartheta_0) = \frac{\|\vartheta_j - \vartheta_0\|}{v}$  со скоростью распространения сигналов  $v > 0$ .

Рассматривается задача оценивания неизвестного положения источника  $\vartheta_0$  по наблюдениям  $X^\varepsilon = (X_{j,t}, 0 \leq t \leq T, j = 1, 2, 3)$ . Согласно [1], предлагаемая оценка минимального расстояния  $\vartheta_\varepsilon^*$ , определяемая уравнением

$$\int_0^T \|X_t - x_{t-\tau(\vartheta_\varepsilon^*)}\|^2 dt = \inf_{\vartheta \in \Theta} \int_0^T \|X_t - x_{t-\tau(\vartheta)}\|^2 dt,$$

где

$$\int_0^T \|X_t - x_{t-\tau(\vartheta)}\|^2 dt = \sum_{j=1}^3 \int_0^T |X_t - x_{t-\tau(\vartheta)}|^2 dt.$$

Доказано, что оценка  $\vartheta_\varepsilon^*$  является состоятельной и асимптотически нормальной.

## Список литературы

1. Kutoyants Y. A. Identification of Dynamical System with Small Noise. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 1994.

# Построение хеджирующих стратегий для европейских опционов с дивидендами<sup>34</sup>

Ним В. Д.

Томский Государственный Университет, Томск

e-mail: [badhelper@gmail.com](mailto:badhelper@gmail.com)

Стохастическая финансовая математика – раздел математики, призванный анализировать финансовые структуры, функционирующие в условиях неопределенности и находить наиболее рациональные способы управления финансовыми структурами и средствами, с учетом таких факторов, как время, риск и др. Финансовый рынок является основным объектом изучения стохастической финансовой математики, базирующейся на таких дисциплинах как теория случайных процессов, статистика случайных процессов и др.

Пусть дан стохастический базис  $(\square, F, F = (F_t)_{0 \leq t \leq T}, P)$ . Рассмотрим рынок с двумя активами – банковский счет  $B = (B_t)_{0 \leq t \leq T}$  и рискованной акцией  $S = (S_t)_{0 \leq t \leq T}$ . Приведенная модель Блэка-Шоулза имеет вид

$$\{B_t = 1, S_t = S_0 \exp \left\{ \sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2} t \right\}.$$

**Определение 1.** Финансовой стратегией называют процесс  $\pi = (\pi_t)_{0 \leq t \leq T}$ :  $\square_t = (\beta_t, \gamma_t)$  –  $F_t$ -изм., описывающий состояние портфеля ценных бумаг в момент времени  $t > 0$ :

$$X_t^\pi = \beta_t B_t + \gamma_t S_t.$$

Мы рассматриваем лишь самофинансируемые стратегии (SF-стратегии)  $\pi = (\pi_t)_{0 \leq t \leq T}$ , т.е. такие, что для капитала  $X_t^\pi$  имеет место интегральное представление

$$X_t^\pi = X_0^\pi + \int_0^t \beta_u dB_u + \int_0^t \gamma_u dS_u$$

с условиями

$$\int_0^T |\beta_t| dt < +\infty, \quad \int_0^T \gamma_t^2 dt < +\infty, \quad (\text{п. н.}).$$

Пусть  $D = (D_t)_{0 \leq t \leq T}$  –  $F_t$ -изм. процесс с  $D_0 = 0$ . Этот процесс будем интерпретировать как процесс притока капитала (например, за счет дивидендов). Суммарный же капитал от  $\square$  и  $D$  определяется формулой

$$X_t^\pi = X_0^\pi + \int_0^t \beta_u dB_u + \int_0^t \gamma_u dS_u + D_t.$$

Множеством самофинансируемых стратегий обозначим  $\square$ .

**Определение 2.** Пусть  $f_T$  – некоторая неотрицательная  $F_T$ -изм. функция, называемая платежной функцией. Задачей хеджирования является найти такую стратегию  $\pi \in \square$ , чтобы выполнялось неравенство

$$X_T^\pi \geq f_T.$$

## Список литературы

[1] Ширяев А. Н., Кабанов Ю. М. К теории расчетов опционов Европейского и Американского типов. II. Непрерывное время // Теория вероятн. и ее примен. – 1994. Т. 39, № 1. С. 80 – 129.

[2] Липцер Р. Н., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов // М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. – 1974, С. 696.

# О моделировании и прогнозировании курса валют (на примере гонконгского доллара) <sup>35</sup>

Нурбаев А. С., Емельянова Т. В.

НИ ТГУ, г.Томск

e-mail: aidar.nurbayev@email.ru

В наше время, задача прогнозирования играет важную роль в той или иной сфере деятельности. На современном этапе российско-китайское взаимодействие характеризуется широким спектром областей сотрудничества, включающих торговые-экономические и гуманитарные связи. В связи с этим, в этой работе рассматривается курс гонконгского доллара.

Цель данной работы заключается в изучении моделей курса валют: построение регрессионной, линейной стохастической моделей. Основные этапы: проверка данных на нормальность, аппроксимация данных, проверка временных рядов на стационарность, доказательство теоремы Вольда.

**Теорема(Вольд ч.1)**  $\{y_t\}$  – регулярный стационарный случайный процесс:  $Ey_t = 0 \Rightarrow \exists! \{u_s\}, \{v_s\}: y_t = w_t + o_t$

$$u_0 = 1, \sum_{s=0}^{\infty} u_s^2 < \infty, Eu_s^2 = \sigma^2, Ev_s = Eo_s = Ev_s v_t (s \neq t) = Ev_s o_t$$

$$(v_s \in M_s, o_t \in M_{-\infty}), w_t = \sum_{s=0}^{\infty} u_s v_{t-s}$$

**Теорема(Вольд, ч.2)**  $\{w_t\}$  - регулярный случайный процесс,  $\{o_t\}$  - детерминированный

## Список литературы

- [1] Суслов В.И., Ибрагимов Н.М., Талышева Л.П., Цыплаков А.А. "Эконометрия"(издательство НГУ - 2005 г.)
- [2] Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов М.: "Мир", 1976 г. - 756 с

# Метод выбора модели эффективного оценивания коэффициентов диффузионных процессов <sup>36</sup>

Перелевский С.С. Пчелинцев Е.А.

Томский Государственный Университет, Томск

e-mail: evgen-pch@yandex.ru, slavaperelevskiy@mail.ru

Рассматривается задача оценивания неизвестной функции сноса  $S(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , по наблюдениям процесса  $(y_t)_{0 \leq t \leq T}$ , описываемого стохастическим дифференциальным уравнением:

$$d y_t = S(y_t) dt + d \omega_t, \quad 0 \leq t \leq T,$$

где  $(\omega_t)_{t \geq 0}$  -- скалярный винеровский процесс, начальное значение  $y_0$  некоторая заданная постоянная. Для оценивания функции  $S$  в работах [1,2] предложены процедуры выбора модели на основе взвешенных оценок МНК и их улучшенных модификаций.

В данной работе развивается метод эффективного оценивания в адаптивной постановке, т.е. когда отсутствует информация о гладкости оцениваемой функции. Получена асимптотическая нижняя граница для минимаксного квадратичного риска, равная константе Пинскера. С использованием оракульного неравенства из [2] доказана асимптотическая эффективность улучшенной процедуры выбора модели, т.е. установлено, что асимптотический квадратичный риск совпадает с константой Пинскера.

## Список литературы

- [1] Galthouk L.I., Pergamenschikov S.M. Adaptive sequential estimation for ergodic diffusion processes in quadratic metric. Journal of Nonparametric Statistics, 2011, 23, 2, 255-285.
- [2] Pchelintsev E. Improved estimation in a non-Gaussian parametric regression. Statistical Inference for Stochastic Processes, 2013, 16, 1, 15-28.

---

<sup>36</sup> Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ (проект № 2.3208.2017/4.6).

# Статистический анализ зависимости объемного коэффициента нефти от некоторых ее физических параметров

Степаненко А.С.

ТГУ, Томск

e-mail: [d107252@rambler.ru](mailto:d107252@rambler.ru)

Актуальность обоснования PVT свойств нефтей и газов обусловлена использованием объемного коэффициента нефти, газосодержания и плотности товарной нефти в рамках подсчета запасов, при составлении проектно-технической документации и при гидромоделировании.

Объемный коэффициент нефти является очень важным параметром в нефтяной отрасли. Существуют лабораторные исследования для его оценки, но не всегда удается их провести. В связи с этим вопрос об оценке и предсказания объемного коэффициента остается актуальным и на данный момент.

В данной работе рассматривается регрессионная модель и вероятностно-статистические методы оценки ее качества [1].

Численная реализация алгоритмов идентификации и анализа моделей проводится в MATLAB [2].

## Список литературы

[1] Дрейпер Н., Смит Г. Прикладной регрессионный анализ. Множественная регрессия. – 3-е изд. – М.: «Диалектика», 2007. – С. 912.

[2] Сирота А.А. Методы и алгоритмы анализа данных и моделирование в MATLAB. – СПб. : БХВ-Петербург, 2016. – 384 с.

# Об оценивании параметров регрессионной модели с семимартингальным шумом <sup>37</sup>

Степанова Е. А.

Томский Государственный Университет, Томск  
e-mail: zhenyutka@mail.ru

При использовании последовательного оценивания достигается заметный выигрыш (в среднем) в числе наблюдений, необходимым для различения интересующих нас гипотез с заданными характеристиками точности. Поэтому к последовательной схеме наблюдений целесообразно обращаться, когда каждое наблюдение является труднодоступным и по условиям эксперимента исследователь имеет практическую возможность реализовать эту схему.

Метод последовательного оценивания параметров подробно рассматривался в применении к процессам описываемых уравнениями диффузионного типа в работах Липцера и Ширяева [1], Новикова [2].

Оценивался параметр  $\theta$  диффузионного процесса, который описывается стохастическим дифференциальным уравнением

$$dY_t = \theta f_t(Y)dt + dW_t,$$

по наблюдениям процессов  $f_t$  и  $Y_t$  ( $W_t$  – винеровский процесс).

В данной работе рассматривается задача последовательной оценки параметров регрессионной модели

$$dY_t = \theta Y_t dt + dL_t,$$

С семимартингальным шумом  $dL_t = \sigma_1 W_t + \sigma_2 \sum_{i=1}^{N_t} \xi_i$ .

## Список литературы

- [1] Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов – Издательство «Наука» Москва -1974, ГЛ. XVII С. 639-651
  - [2] Новиков А.А. Последовательное оценивание параметров процессов диффузионного типа - Математические заметки 1972, выпуск 5, С.627-638
-

# Скорейшее обнаружение разладки в стохастических динамических системах с дискретным временем

Теньзин Р.О.

НИ ТГУ, Томск

e-mail: 4ubarok@gmail.com

Рассматривается задача статистической идентификации разладки в стохастической системе с дискретным временем. При  $t > 1$  наблюдается случайный процесс  $\xi(t)$  с дискретным временем ( $t = 1, 2, \dots$ ). Предполагается, что до некоторого момента  $\theta > 1$  величины  $\xi(1), \xi(2), \dots, \xi(\theta-1)$  независимы и одинаково распределены с функцией распределения  $F_0(x)$ . Величины же  $\xi(\theta), \xi(\theta+1), \dots, \theta \geq 1$  также независимы (как между собой, так и от всех предшествующих величин) и одинаково распределены, но уже с другой функцией распределения  $F_1(x)$ . Момент  $\theta$  появления «разладки» неизвестен. Требуется найти такой метод наблюдения, чтобы на основе наблюдаемых данных после появления разладки как можно скорее был подан соответствующий «сигнал» о ее наличии [1].

Для параметра  $\theta$  принимается априорное распределение

$$P(\theta = t) = (1 - p)^{t-1} p, \quad (1)$$

где  $p$  – некоторая известная постоянная.

**Теорема 1.** Если при каждом  $t$  распределение случайной величины  $\pi(t)$  (где  $\pi(t) = P(\theta = t \mid \theta > 0)$ ) непрерывно, то оптимальный метод является нерандомизированным и состоит в наблюдении процесса  $\pi(t)$  до первого момента  $\nu$ , для которого  $\pi(\nu) \geq \pi_1$ , где  $\pi_1$  подсчитывается из условия фиксации  $\omega = P(\nu = t)$ .

В работе проводится численное моделирование предложенной в [1] процедуры обнаружения разладки.

## Список литературы

1. Ширяев А. Н. Обнаружение спонтанно возникающих эффектов // Докл. АН СССР. – 1961. – Т. 138, № 4. – С. 799 – 801.

# О последовательном оценивании параметров авторегрессионной модели с непрерывным временем

Хабарова Е. Л.

Томский государственный университет, Томск  
e-mail: flo-00@mail.ru

В работе рассматривается задача оценивания параметров авторегрессии второго порядка с непрерывным временем, задаваемой уравнением

$$d\dot{X}_t = (\theta_1 \dot{X}_t + \theta_2 X_t)dt + dW_t,$$

здесь  $\theta = (\theta_1, \theta_2)'$  – вектор-столбец неизвестных параметров, штрих означает транспонирование,  $W_t$  – винеровский процесс,  $\dot{X}_t = \frac{dX_t}{dt}$ .

Предлагается последовательная процедура оценивания параметров, исследуются ее свойства.

## Список литературы

- [1] Ширяев А.Н. Вероятность. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1980. – 576 с.
- [2] Булинский А.В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов. – М.: ФИЗМАЛИТ; Лаборатория Базовых Знаний, 2003. – 400 с.
- [3] Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1974. – 696 с.
- [4] Емельянова Т.В., Конев В.В. О последовательном оценивании параметров непрерывной авторегрессии// Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2013. № 5(25). С. 12 – 25.

# О подходе к идентификации параметров стохастической динамической системы

Шерстобитова А. О., Емельянова Т. В.

Томский государственный университет, г. Томск  
e-mail: annasherstobitova06@gmail.com

В настоящее время все большую актуальность приобретают задачи идентификации, прогнозирования, фильтрации, обработки временных рядов. В таких задачах широко используются авторегрессионные модели с непрерывным временем, описываемые стохастическими дифференциальными уравнениями. Проблема их применения состоит в том, что в большинстве случаев параметры моделей заранее неизвестны, поэтому перед использованием модели требуется идентифицировать ее параметры непосредственным оцениванием [1]. Для решения задачи оценивания параметров требуются методы, которые позволят контролировать точность получаемых оценок при малых объемах данных. В связи с этим успешно применяется последовательный анализ данных, суть которого заключается в отыскании специальных правил определения длительности наблюдений в ходе реализации процесса.

Рассматривается процесс диффузионного типа, заданный стохастическим дифференциальным уравнением

$$dX_t = \theta' X_t dt + \sigma dW_t,$$

$W = (W_t^1, \dots, W_t^n)_{t>0}$  - винеровский процесс,  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p)'$  - вектор оцениваемых параметров.

В работе рассматривается задача оценивания параметров процесса непрерывной авторегрессии второго порядка (AR(2)). С помощью специального правила остановки осуществляется построение последовательного плана  $\{\tau(h), \theta^*(h)\}$ . Для получения последовательных оценок параметров авторегрессионной модели, а также вычисления оптимального времени наблюдения, проводится численное моделирование Монте-Карло.

## Список литературы

[1] Емельянова Т. В., Конев В. В. О последовательном оценивании параметров непрерывной авторегрессии. – Вестник Томского государственного университета: Математика и механика. – 2013. - №5(25). – с.12-25.

**СЕКЦИЯ  
ВЕЩЕСТВЕННЫЙ,  
КОМПЛЕКСНЫЙ И  
ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И  
ТОПОЛОГИЯ**

# Конформное отображение на круговой многоугольнике типа полосы

Бондаренко В. В.

НИ ТГУ, г.Томск

e-mail: vladislava9001@gmail.com

**Определение.** Односвязную область  $\Delta$ , лежащую в комплексной плоскости  $\mathbb{C}$ , будем называть *круговым многоугольником типа полосы с симметрией переноса вдоль вещественной оси на  $2\pi$* , если область  $\Delta$  инвариантна относительно сдвига  $L(w+2\pi)=2(z)+2\pi$ , причем при преобразовании  $L$  на бесконечности остаются неподвижными 2 простых конца, и граница  $\Delta$  от точки  $s$ ,  $s \in \partial D$  до точки  $s+2\pi$  состоит из конечного числа дуг окружностей.

**Теорема.** Голomorphic и однолистное отображение  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \Delta$ ,  $\mathbb{Z} = \{z \in \mathbb{C}: 0 < \text{Im } z < h\}$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{2h}{\pi^2} F(z) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^n \left( \frac{1 - \alpha_k^2}{4h} \operatorname{cosec}^2 \left( \pi \frac{z - a_k^j}{2ih} \right) + i \frac{M_k}{\pi} \operatorname{ctg} \left( \pi \frac{z - a_k^j}{2ih} \right) \right) + \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{p=1}^m \left( \frac{1 - \beta_p^2}{4h} \operatorname{cosec}^2 \left( \pi \frac{z - b_p^j}{2ih} \right) + i \frac{M_p}{\pi} \operatorname{ctg} \left( \pi \frac{z - b_p^j}{2ih} \right) \right) + \Phi(z),$$

где  $a_k^j = a_k^0 + 2\pi j$ ,  $b_p^j = b_p^0 + 2\pi j$ ,  $F(z)$  – производная Шварца функции  $f$ ,  $M_k$ ,  $M_p$  – вещественные параметры;  $\alpha_k \pi$  – угол при вершине, прообразом которой является точка  $a_k^0$ ,  $a_k^0 \in [0, 2\pi)$ ,  $k = 1, \dots, n$ ;  $\beta_p \pi$  – угол при вершине, прообразом которой является точка  $b_p^0$ ,  $b_p^0 \in \{x + ih; x \in [0, 2\pi)\}$ ,  $p = 1, \dots, m$ ;  $\Phi(z)$  – целая функция.

## Список литературы

- [1] Александров И.А. Теория функций комплексного переменного. Томск: ТГУ, 2002.
- [2] Колесников И.А. Отображение на круговой многоугольнике с симметрией переноса // Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех. №2(22). 2013. С. 33-44.
- [3] Александров И.А. Конформные отображения полуплоскости на области с симметрией переноса // Изв. вузов. Матем. №6. 1999. С. 15-18.

# Частный случай в задаче Фекете и Сегё

Борисова Я. В.

НИ Томский государственный университет, Томск  
e-mail: borisova\_yana@list.ru

Пусть  $S$  – множество всех голоморфных и однолистных в единичном круге отображений

$$f(z) = z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots$$

Задачу о нахождении множества значений функционала

$$I: S \rightarrow R, I(f) = \operatorname{Re}(c_3 - \gamma c_2^2), \gamma \in R,$$

принято называть задачей Фекете и Сеге [1], [2,3].

При решении данной задачи с помощью метода внутренних вариаций [4] оказалось нужным рассмотреть отдельно случай  $\gamma=1$ . Дифференциальное уравнение для граничных отображений в этом случае имеет вид

$$\frac{f'^2(z)}{f^4(z)} = \frac{z^4 + bz^2 + 1}{z^4}, b = 2I(f).$$

Решениями этого уравнения являются отображения

$$f_1(z, c_2) = -\frac{z}{z^2 + c_2 z - 1} \text{ и } f_2(z, c_2) = \frac{z}{z^2 - c_2 z + 1}.$$

Отображение  $f_2 \in S$  только тогда, когда  $c_2 \in [-2; 2]$ , а  $f_1 \in S$  только тогда, когда  $c_2 \in [-2i; 2i]$ . Отображение  $f_1$  вносит максимум, а отображение  $f_2$  вносит минимум во множество значений функционала.

## Список литературы

- [1] Szego G., Fekete M. Eine Bemerkung uber ungerade schlichte Funktionen // J.London Math. Soc., 1933, vol. 8, pt. 2(30). pp. 85 – 89.
- [2] Голузин Г.М. Некоторые вопросы теории однолистных функций // Тр. МИАН СССР. 1949. Том 27. С. 3 – 110.
- [3] Александров И.А. Экстремальные свойства класса  $S(w_0)$  // Тр. Томского ун-та. 1963. Вып. 169. С. 24 – 58.
- [4] Александров И.А., Колесников И.А., Копанев С.А., Копанева Л.С. Метод внутренних вариаций в теории однолистных отображений // Изд. Томского ун-та. 2017.

# Некоторые свойства свободных $n$ -периодических топологических групп

Горбунов Е.А, Гензе Л. В.

Томский государственный университет, Томск

e-mail: [johngorbunov@me.com](mailto:johngorbunov@me.com)

**Определение 1.** Пусть  $2 \geq n$  – некоторое натуральное число. Группу  $G$  с единицей  $e$  будем называть  $n$ -периодической, если  $a^n = e$ , для каждого  $a \in G$ .

**Определение 2.** *Прямой суммой* семейства абелевых групп  $\{A_s\}_{s \in S}$  называется подмножество в декартовом произведении  $\prod_{s \in S} A_s$ , состоящее из таких элементов  $\{a_s\}_{s \in S}$ , у которых  $a_s \neq 0$  лишь для конечного числа индексов  $s \in S$ .

**Определение 3.** *Свободной абелевой  $n$ -периодической группой*, порожденной множеством  $X$ , будем называть прямую сумму семейства групп  $\{Z_n^x\}_{x \in X}$ , где  $Z_n^x$  изоморфна  $Z_n$  для каждого  $x \in X$ . Обозначим эту группу  $A^{[n]}(X)$ .

Наша работа посвящена доказательству существования свободной абелевой  $n$ -периодической группы методом, аналогичным методу Архангельского [1].

Подобное доказательство существования свободной (неабелевой)  $n$ -периодической группы можно найти в [2].

**Теорема 1.** Для любого тихоновского пространства  $X$  существует абелева  $n$ -периодическая топологическая группа  $A^{[n]}(X)$ , обладающая следующими свойствами:

- 1)  $X$  гомеоморфно замкнутому подпространству в  $A^{[n]}(X)$ ;
- 2) Алгебраически  $A^{[n]}(X)$  является свободной  $n$ -периодической группой, порожденной множеством  $X$ ;
- 3) Если  $G$  – абелева  $n$ -периодическая топологическая группа и  $f: X \rightarrow G$  – непрерывное отображение, то  $f$  можно продолжить до непрерывного гомоморфизма  $\hat{f}: A^{[n]}(X) \rightarrow G$ .

Группа, существование которой доказано в теореме 1, называется свободной абелевой  $n$ -периодической топологической группой пространства  $X$ .

## Список литературы

[1] Архангельский А.В. Топологические пространства и непрерывные отображения. Замечания о топологических группах. М.: Изд-во МГУ, 1969.

[2] Гензе Л.В. Свободные  $n$ -периодические топологические группы // Вестн. Томского ун-та. Математика и механика. 2010. № 3(11). С. 23-28.

# Численное интегрирование дифференциального уравнения функции комплексного переменного

Густилина Т. А.

НИ ТГУ, Томск

e-mail: gustilinata@gmail.com

Будем рассматривать уравнение:

$$f'(z) = F(z, f(z)).$$

С начальным условием:

$$f(z_0) = w_0,$$

где  $f, f(z) = w$ , комплекснозначная функция комплексного переменного, определенная и голоморфная в области  $D$ ,  $z_0 \in D$ ,  $F(z, w)$  – функция голоморфная в точке  $(z_0, w_0)$ .

Пусть  $z_0$  и  $z, z \in D$ , можно соединить прямой, целиком содержащаяся в  $D$ , тогда  $f(z) = g_N$  можно найти из рекуррентной формулы:

$$g_{n+1} = g_n + G_n \frac{1}{N}, \quad n \in \overline{1, N-1}, \quad (*)$$

где

$$G_n = F(\gamma(t), f(\gamma(t)))(z - z_0),$$

$$\gamma(t) = t(z - z_0) + z_0,$$

$$\frac{1}{N} - \text{шаг сетки.}$$

В основе вывода формулы (\*) лежит метод ломанных Эйлера.

## Список литературы

Агафонов С.А. Дифференциальные уравнения. М.: МГТУ имени Н. Э. Баумана. 2004. Т. 8

Голубев В.В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.-Л.: Гостехтеориздат, 1950.

# Простейшие свойства пространства $C_p(X, Y)$

Королев Д. И.

ТГУ, Томск

e-mail: dracen658@gmail.com

В данном докладе представлено изложение простейших свойств пространства  $C_p(X, Y)$ . В частности, вводится понятие прекалибра и калибра, и доказывается, что пространство  $C_p(X, Y)$  совершенно- $x$ -нормально.

**Определение 1** Кардинал  $\tau$  называется *прекалибром* (калибром) пространства  $X$ , если, каково бы ни было семейство  $\mu = \{U_\alpha: \alpha \in A\}$  непустых открытых в  $X$  множеств, такое, что  $|A| = \tau$ , найдется  $B \subset A$ , для которого  $|B| = \tau$  и семейство  $\{U_\alpha: \alpha \in B\}$  центрировано (соответственно  $|B| = \tau$  и  $\cap \{U_\alpha: \alpha \in B\} = \emptyset$ ).

**Теорема 1.** Если регулярный кардинал  $\tau$  - прекалибр (калибр) пространства  $X_\alpha$  для каждого  $\alpha \in A$ , то  $\tau$  является прекалибром (соответственной калибром) произведения  $X = \prod\{X_\alpha: \alpha \in A\}$ .

**Определение 2.** Пространство  $X$  называется совершенно- $x$ -нормальным, если замыкание каждого открытого в нем множества является нуль-множеством некоторой непрерывной вещественной функции на  $X$ .

**Теорема 2.** Пространство  $C_p(X)$  всегда совершенно- $x$ -нормально.

## Список литературы

[1] А. В. Архангельский Топологические пространства функций // Издательство Московского Университета 1989.

# Представление функционала в гильбертовом пространстве Соболева

Корытов И. В.

Национальный исследовательский Томский политехнический университет, Томск  
e-mail: korytov@tpu.ru

Вопросы построения оценки погрешности формулы численного интегрирования функции  $n$  переменных методами функционального анализа рассмотрены С.Л. Соболевым в [1,2]. Одной из промежуточных задач выступало представление функционала в пространстве  $L_2^{(m)}$ . Для пространства  $W_2^{(m)}$  задача рассматривалась Ц.Б. Шойнжуровым в [3], где в норму включены неопределенные числовые коэффициенты. В данной работе представление получено способом, отличным от примененного в [3], а в норму введены биномиальные коэффициенты:

$$\|f|W_2^{(m)}(\mathbb{R}^n)\| = \left( \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} (D^\alpha f(x))^2 dx \right)^{1/2}.$$

**Теорема 1.** Существует функция  $u \in W_2^{(m)}$ , такая что линейный функционал  $l \in W_2^{(m)*}$  имеет представление

$$\langle l, f \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} D^\alpha u D^\alpha f dx,$$

**Теорема 2.** Если существует шар  $B_r \subset \mathbb{R}^n$  конечного радиуса  $r$ , такой что  $\text{supp}(l) \subseteq B_r$  и  $2m > n$ , то

$$u = G * l,$$

где  $G(x)$  – фундаментальное решение дифференциального уравнения

$$\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} (-1)^k D^{2\alpha} u = l.$$

## Список литературы

- [1] Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974.
- [2] Соболев С.Л. О формулах механических кубатур в  $n$ -мерном пространстве // Доклады АН СССР. 1961. Т. 137, № 3. С. 527 – 530.
- [3] Шойнжуров Ц.Б. Оценка функционалов погрешности кубатурной формулы в пространствах с нормой, зависящей от младших производных. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Новосибирск, 1967.

# Топологические пространства непрерывных функций с разреженно-С- компактно-открытой топологией

Мусаев Т. О.

Томский государственный университет

kutman\_musaev\_11@mail.ru

В работе рассматривается пространство непрерывных вещественнозначных функций  $C_\lambda(X)$ , заданных на тихоновском пространстве  $X$  с множественно-открытой топологией. Предбазисными множествами такой топологии являются множества вида  $[B, U] = \{f : f(B) \subset U\}$ , где  $B$  - элемент семейства  $\lambda$  разреженных, С-компактных подмножеств  $X$ ,  $U$  - открытое в  $\mathbb{R}$  множество. Напомним, что С-компактными называются множества, которые отображаются в компакт при любом непрерывном вещественнозначном отображении.

Рассматриваемое семейство  $\lambda$  удовлетворяет свойству  $\lambda = \lambda(C)$ , то есть каждое С-компактное подмножество произвольного элемента из  $\lambda$  принадлежит  $\lambda$ . В таком случае, по теореме Осипова [1] множественно-открытая топология совпадает с топологией равномерной сходимости на элементах семейства  $\lambda$ , то есть  $C_\lambda(X) = C_{\lambda, u}(X)$ . Более того, последние пространства функций являются топологическими векторными.

Целью исследования является сравнение различных теснот пространства  $C_\lambda(X)$ , при конкретных примерах пространства  $X$ .

В [1] было показано, что если  $X = [a, b]$ , то  $vet(C_p(X)) = \omega < vet_1(C_p(X))$ . В ходе работы удалось доказать, что такое неравенство сохранится, если вместо топологии поточечной сходимости рассматривать на пространствах функций разреженно-С-компактно-открытую топологию.

## Список литературы

1. Осипов А.В. Различные виды тесноты функционального пространства // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, №4.

# Геометрический метод изучения аналитических свойств негомеоморфных пространственных отображений.<sup>38</sup>

Новик А. В., Малютина А. Н.

Томский государственный университет

e-mail: novik.anastasiia@mail.ru

В работе развивается геометрический метод для изучения свойств отображений с  $s$ -усредненной характеристикой.

**Теорема 1.** Пусть  $D, D' \subset R^n$  – области,  $f: D \rightarrow D'$  – отображение с  $K_{0,s}^*$ -усредненной характеристикой,  $s > 1$ ,  $D' = f(D)$ . Пусть  $A \subset D$  – борелевское множество такое, что кратность  $N(f, A) < \infty$ . Тогда существует ограниченная, неотрицательная, аддитивная, абсолютно непрерывная функция  $\Phi_{0,s}^*$  борелевских множеств в  $D$  такая, что для любого семейства кривых  $\Gamma \subset A$  выполнено неравенство  $M_n^s(\Gamma) \leq N^{s-1}(f, A) \Phi_{0,s}^*(A) M_{ns}^{s-1}(f\Gamma)$ , где

$$\Phi_{0,s}^*(A) = \int_A K_0^s(x, f) |J(x, f)| d\sigma_x.$$

**Теорема 2.** Пусть  $D \subset R^n$  – ограниченная область,  $D' \subset R^n$  – область. Пусть  $f: D \rightarrow D'$  – отображение с  $K_{I,s}^*$ -усредненной характеристикой,  $s > 1/(n-1)$ ,  $D' = f(D)$ . Пусть  $G \subset D$  – борелевское множество такое, что кратность  $N(f, G) < \infty$ . Тогда существует ограниченная, неотрицательная, аддитивная, абсолютно непрерывная функция  $\Phi_{I,s}^*$  борелевских множеств в  $D$  такая, что для любого семейства кривых  $\Gamma \subset G$  выполнено неравенство:

$$M_n^s(\Gamma) \leq c^{-ns}(D, R) \cdot \Phi_{I,s}^*{}^{-1}(G) M_{ns}^{s+1}(f\Gamma),$$
 где  $c(D, R)$  – константа,

зависящая от области  $D$ .

## Список литературы

1. Малютина А.Н., Елизарова М.А. Теоремы о полунепрерывности снизу отображений с  $s$ -усредненной характеристикой // Вестник ТГУ. Математика и механика. 2009. № 4(8).

# О периодических функциях нескольких действительных переменных

Соколова Г. К.

Иркутский государственный университет, Иркутск  
e-mail: 98gal@mail.ru

Математическое моделирование различных процессов и явлений, повторяющихся во времени и пространстве приводит к понятию периодической функции нескольких переменных. Эти математические модели имеют вид начально-краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных. В данной работе доказан ряд утверждений, которые применяются для построения периодических решений уравнений в частных производных.

**Определение.** Функция  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  называется периодической с периодом  $\bar{T}$ , если существует вектор  $\bar{T} \neq \bar{0}$ , что для всех  $\bar{r} \in \mathbb{R}^n$  выполняется равенство  $f(\bar{r} + \bar{T}) = f(\bar{r})$ .

В работе [1] было показано, что множество периодов  $P_f$  произвольной периодической функции  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  имеет вид

$$P_f = \Lambda(\bar{T}_1, \dots, \bar{T}_{m_1}) \oplus \text{span}(\bar{\tau}_{m_1+1}, \dots, \bar{\tau}_{m_1+m_2}),$$

где  $\bar{T}_k$  – базисные вектора  $m_1$ -мерной решётки,  $\bar{\tau}_k$  – направления постоянства функции, и  $m_1 + m_2 \leq n$ . Как показано в [1], с помощью линейного преобразования аргумента  $\bar{r} \in \mathbb{R}^n$  всякую периодическую функцию  $n$  переменных можно сделать периодической по первым  $m_1$  переменным и постоянной по следующим  $m_2$  переменным.

**Теорема 1.** Пусть функция  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  является непрерывной и  $T_i$ -периодической по переменной  $x_i$ , тогда справедливо

$$\int_0^{x_i} f(x_1, \dots, x_{i-1}, t, \dots, x_n) dt = \frac{x_i}{T_i} \int_0^{T_i} f(x_1, \dots, x_{i-1}, t, \dots, x_n) dt + \varepsilon_i(\bar{r}),$$

где  $\varepsilon_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  –  $T_i$ -периодическая по переменной  $x_i$  функция.

**Теорема 2.** Пусть функция  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  является непрерывно дифференцируемой и  $T_i$ -периодической по переменной  $x_i$ , тогда частная производная  $\partial_{x_i} f$  также будет  $T_i$ -периодической по переменной  $x_i$ .

## Список литературы

- [1] Соколова Г. К. О периодических функциях нескольких действительных переменных // ИТНОУ: Информационные технологии в науке, образовании и управлении. 2018. № 5(9). С. 60 – 65.

# О минимальных периодических поверхностях

Хабарова Е. Л.

Томский государственный университет, Томск  
e-mail: flo-00@mail.ru

В работе рассмотрен способ построения периодических минимальных поверхностей в трехмерном евклидовом пространстве на основе формулы Кристоффеля-Шварца для счетноугольников типа полуплоскости.

Отображение

$$f(z) = c_1 \int_{z_0}^z \prod_{k=1}^n \left( \sin \frac{a_k - \zeta}{2} \right)^{\alpha_k - 1} d\zeta + c_2,$$

где  $c_1, c_2$  – комплексные постоянные,  $a_k \in [0, 2\pi)$  – прообразы вершин счетноугольника,  $\alpha_k \pi$  – углы при этих вершинах, переводит верхнюю полуплоскость  $\Pi^+$ ,  $\Pi^+ = \{z \in \mathbb{C}: \text{Im}z > 0\}$  на счетноугольник. Тогда отображение  $F: \Pi^+ \rightarrow \Sigma$ , заданное параметрически

$$u(z) = \frac{1}{2} \text{Re} \int_{z_0}^z \left( \frac{1}{g} - g \right) dz,$$
$$v(z) = \frac{1}{2} \text{Re} \int_{z_0}^z i \left( \frac{1}{g} + g \right) dz,$$
$$w(z) = \text{Re}(z - z_0),$$

где  $g = f'$ , определяет минимальную периодическую поверхность  $\Sigma$ .

**Предложение.** Поверхность  $\Sigma$  является односвязной минимальной поверхностью с одной граничной компонентой, лежащей на конечном количестве вертикальных плоскостей. Эти плоскости встречаются под углами  $\alpha_k \pi$  в образах  $a_k$ . Кроме того, поверхность инвариантна относительно сдвига  $w \rightarrow w + 2\pi$ .

## Список литературы

- [1] Fujimori S., Weber M. A construction method for the triply periodic minimal surfaces // OCAMI Studies. V. 3. 2009. P. 79–90.
- [2] Александров И.А. Конформные отображения полуплоскости на области с симметрией переноса // Изв. вузов. Матем., №6, 1999. с 15–18.
- [3] Минимальные поверхности / Кархер Г., Саймон Л. [и др.]; под ред. Оссерман Р.; перевод с английского. – М.: ФИЗМАЛИТ, 2003. – 352 с.

# Пространства непрерывных функций на счетных метрических пространствах $X$ с $X'' = \emptyset$

Хамханов А. К., Хмылева Т. Е.

ТГУ, Томск

e-mail: msdos147@mail.ru

В данной работе мы рассматриваем счетные метрические пространства  $X$ , у которых вторая производная  $X'' = \emptyset$ . Возможны следующие случаи:

1)  $X$  – локально компактно

1.1)  $X'$  – конечно или пусто. Тогда пространство  $C_p(X)$  будет линейно гомеоморфно  $s, c_0$  или  $s \times c_0$

1.2)  $X'$  – счетное множество. Тогда пространство  $C_p(X)$  будет линейно гомеоморфно  $(c_0 \times c_0 \times \dots \times c_0)_s$ .

2)  $X$  – не локально компактно.

2.1)  $X'$  – конечное множество. Тогда пространство  $C_p(X)$  будет линейно гомеоморфно  $(s \times s \times \dots \times s)_{c_0}$ .

2.2)  $X'$  – счетное и в пространстве  $X$  лишь конечное число точек не локальной компактности. Тогда пространство  $C_p(X)$  линейно гомеоморфно  $(s \times s \times \dots \times s)_{c_0} \times (c_0 \times c_0 \times \dots \times c_0)_s$ .

2.3)  $X'$  – счетное множество и в  $X$  счетное число точек не локальной компактности. Тогда пространство  $C_p(X)$  будет линейно гомеоморфно  $((s \times s \times \dots \times s)_{c_0} \times (s \times s \times \dots \times s)_{c_0} \times \dots \times (s \times s \times \dots \times s)_{c_0})_s$ .

Возникает вопрос о дополняемости этих пространств. С помощью следующих теорем мы покажем, что они не вкладываются друг в друга дополняемо.

**Теорема 1.** Пусть  $X_i, i \in \mathbb{N}$  векторные пространства,  $S$  метрическое, компакт  $K \subset S$  и линейный непрерывный оператор  $T: (\prod_{i=1}^{\infty} X_i)_s \rightarrow C_p(S)$ . Тогда найдется окрестность  $U(K)$  и номер  $n_0 \in \mathbb{N}$  такие, что для любого  $i \geq n_0$  и  $x_i \in X_i, T(x_i)|_{U(K)} \equiv 0$ .

Пусть  $X_i = C_p(M_i)$  и  $Y_i = C_p(L_i)$ , где  $M_i, L_i$  – произвольные счетные метрические пространства.

**Теорема 2.** Пусть для любого  $i \in \mathbb{N}$  пространство  $X_i$  дополняемо не вкладывается в конечное произведение  $\prod_{j=1}^m Y_j$ . Тогда  $(\prod_{i=1}^{\infty} X_i)_s$  дополняемо не вкладывается в  $(\prod_{i=1}^{\infty} Y_i)_{c_0}$  и  $(\prod_{i=1}^{\infty} X_i)_{c_0}$  дополняемо не вкладывается в  $(\prod_{i=1}^{\infty} Y_i)_s$ .

# Обобщенные и классические решения дифференциально-операторных уравнений с запаздыванием <sup>39</sup>

Шеметова В. В.

Иркутский государственный университет, Иркутск  
e-mail: valentina501@mail.ru

Важное прикладное значение в различных областях науки и техники имеют функционально-дифференциальные уравнения, например, в теории автоматического регулирования и автоколебательных систем, проблемах долгосрочного прогнозирования в экономике и медицине.

Пусть  $E_1, E_2$  – банаховы пространства,  $u, f$  – неизвестная и заданная функции вещественного аргумента в  $E_1$  и  $E_2$  соответственно. Рассмотрим класс линейных дифференциальных уравнений

$$Bu'(t) - A_1u(t) - A_0u(t-h) = f(t), \quad (1)$$

где  $B, A_1$  и  $A_0$  – замкнутые линейные операторы из  $E_1$  в  $E_2$ , причем  $D(B) \subseteq D(A_1) \cap D(A_0)$ , и  $B$  непрерывно обратим,  $h > 0$  – заданное число. Для уравнения (1) зададим начальное условие

$$u(t) = \varphi(t), \quad -h \leq t \leq 0. \quad (2)$$

Здесь  $\varphi(t) \in C([-h, 0]; E_1)$  предполагается известной и определяет решение на отрезке  $[-h, 0]$ . *Классическим* решением начальной задачи (1), (2) назовем функцию  $u(t) \in C([-h, +\infty); E_1) \cap C^1((0, +\infty); E_1)$ , которая обращает в тождество уравнение (1) и удовлетворяет начальному условию (2). Для исследования проблемы однозначной разрешимости рассматриваемой задачи (1), (2) применяется теория обобщенных функций Соболева–Шварца со значениями в банаховом пространстве и понятие *фундаментального* решения [1]. С их помощью доказаны теоремы существования и единственности *обобщенного* (в классе распределений с ограниченным слева носителем) и классического (в классе сильно непрерывно дифференцируемых функций) решений начальной задачи (1), (2).

## Список литературы

[1] Sidorov N., Loginov B., Sinitsyn A., Falaleev M. Lyapunov–Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002. – 568 p.

---

# Об открыто-точечной и би-точечно-открытой топологиях на пространстве $C(X)$

Шильников О. А., Гензе Л. М.

ТГУ, Томск

e-mail: shilnikovandoleg@gmail.com

Пространство  $C(X)$  с точечно-открытой топологией традиционно обозначается через  $C_p(X)$ . Оно имеет предбазу, состоящую из всех множеств вида

$$[x, V]^+ = \{f \in C(X) : f(x) \in V\},$$

где  $x \in X$  и  $V$  - открытое подмножество в  $R$ .

В статье [1] вводятся две новые топологии на  $C(X)$ , которые называются открыто-точечная топология и би-точечно-открытая топология. Открыто-точечная топология на  $C(X)$  имеет предбазу, состоящую из всевозможных множеств вида

$$[U, r]^- = \{f \in C(X) : f^{-1}(r) \cap U \neq \emptyset\}$$

где  $U$  открытое подмножество  $X$  и  $r \in R$ .

Пространство  $C(X)$ , снабженное такой топологией, будет обозначаться через  $C_h(X)$ .

Би-точечно-открытая топология на  $C(X)$  – это топология, порожденная предбазой, состоящей из всевозможных множеств вида  $[x, V]^+$  и  $[U, r]^-$ , где  $x \in X$  и  $V$  - открытое подмножество  $R$ , в то время как  $U$  – открытое подмножество  $X$  и  $r \in R$ . Пространство  $C(X)$ , наделенное би-точечно-открытой топологией обозначается  $C_{ph}(X)$ .

Данная работа посвящена изучению топологических свойств пространств  $C_h(X)$ ,  $C_{ph}(X)$  и их сравнению со свойствами пространства  $C_p(X)$ .

## Список литературы

3. Anubha Jindal, R.A. McCoy, S. Kundu. The open-point and bi-point-open topologies on  $C(X)$ . Topology and its Applications, Volume 187, 1 June 2015, P. 62-74

**СЕКЦИЯ  
ПРЕПОДАВАНИЕ МАТЕМАТИКИ  
И ИНФОРМАТИКИ**

# Решение экстремальных задач в курсе алгебры 9 класса

Бумагина Е.А.

ТФГЛ, Томск

e-mail: milenaalex88@sibmail.com

В повседневной жизни нам приходится решать проблемы покупки товара лучшего качества за меньшую цену, выбора оптимального маршрута для выполнения своих запланированных дел в разных частях города. В математике существует класс задач, в которых при заданных условиях нужно найти наибольшее или наименьшее значение числовой функции [1-2]. Таким задачам отыскания экстремумов в школьном курсе уделяется недостаточное внимание.

Учеников 9 класса можно познакомить с приемами решения задач поиска экстремумов функции, без применения производной. В данной работе приводятся примеры решения подобных задач с использованием параметров, неравенств. Рассматриваются примеры нахождения наибольшего и наименьшего значения в геометрии.

## Список литературы

[1] Алгебра. 9 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А. Г. Мордкович. – М. : Мнемозина, 2010. – 226 с.

[2] Актершев С. П. Задачи на максимум и минимум. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 192 с.

# **Методы решения стереометрических задач на нахождение угла между прямой и плоскостью**

**Казанцева А.И., Гриншпон Я.С.**

НИ ТГУ, Томск

e-mail: tisan91@mail.ru

Большинство стереометрических задач на нахождение угла между прямой и плоскостью можно решить тремя методами: классическим методом, координатно-векторным методом и методом объемов. В работе сравниваются эти методы.

Классический метод требует от школьников глубоких знаний основных понятий и теорем стереометрии и планиметрии, а также хорошего пространственного мышления, необходимого для построения проекции прямой. Вычислительно он сводится к нахождению тригонометрической функции острого угла.

Координатно-векторный метод основывается на введении удобной декартовой системы координат. После чего, как правило, задача сводится к выполнению стандартных вычислительных алгоритмов. Координатно-векторный метод чаще всего удобен, когда заданы числовые значения длин и углов.

Метод объемов основан на выражении высоты треугольной пирамиды из формулы ее объема. Применим только в специальных случаях, когда объем удобно вычисляется при рассмотрении другого основания пирамиды.

## **Список литературы**

[1] Гусев В. А. Методика обучения геометрии: Учеб. пособие для студ. вузов, М.: AcademiA, 2004 г.

# Функциональные методы решения уравнений, неравенств и их систем

Киреенко С. Г.

Национальный исследовательский Томский государственный университет, Томск

e-mail: svkireenko@mail.ru

Не любое уравнение или неравенство преобразованиями сводится к уравнению или неравенству, имеющему стандартный алгоритм решения. В таких случаях ключевую роль могут сыграть такие свойства функций, входящих в уравнение или неравенство, как непрерывность, ограниченность, четность, монотонность, периодичность и другие [1-2].

Применение теоретических знаний о свойствах функций в самых порой неожиданных ситуациях позволяет, с одной стороны, более прочно овладеть материалом по теме «Функции», а с другой стороны, научиться переносить знания из одной тематической области в другую.

Целью данной работы является формирование компетентного мышления школьников через использование функциональных методов решения задач.

Отметим, что довольно часто использование свойств функций позволяет качественно выполнять задания высокого уровня сложности ЕГЭ по математике, а также различных математических олимпиад и конкурсов, где встречаются нетрадиционные формулировки и предусматриваются нестандартные подходы к решению.

Литературы, в которой бы данный материал был систематизирован и сопровождается достаточным количеством примеров, практически нет, а в большинстве школьных учебников нет даже и упоминания о применении функциональных методов решения задач.

При выполнении работы поставлены задачи: изучить и систематизировать функциональные методы решения уравнений, неравенств и их систем; научить школьников распознавать и решать задачи, в которых целесообразно использование свойств функций; создать банк подобных задач и классифицировать их по методам решения; выпустить методическое пособие по теме, разработать специальный курс для классов физико-математического профиля.

## Список литературы

[1] Амелькин В.В., Рабцевич В.Л. Задачи с параметрами: Справ. Пособие по математике. Мн.: ООО «Асар», 2002.

[2] Шарыгин И.Ф., Голубев В.И. Математика: решение задач: 11 кл. М.: Просвещение, 2007.

# **Подходы к решению логических задач на уроках математики и информатики**

**Кондабаева Т.А.**

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «НИ ТГУ», Томск

e-mail: ata-88@inbox.ru

Современные подходы к обучению требуют, в первую очередь, развития личностных качеств ученика, его мышления и творческих способностей. Справиться с этими задачами позволит внедрение в обучение математике задач с логическим содержанием, благодаря которым развивается логическое мышление. Решение логических задач способствует не только успешному освоению математики и информатики, но и понятию основ любой точной науки. Даже в жизни часто приходится сталкиваться с ситуациями, требующими логического решения, установления причинно-следственных связей, умозаключений.

В данной работе предлагаю рассмотреть одну из возможных классификаций логических задач по методам их решения: методом рассуждений, методом графа, с помощью кругов Эйлера, с помощью таблиц истинности, методом равносильных преобразований.

При введении логических задач в школьный курс очень важен строгий отбор задач, должны учитываться возрастные особенности обучающихся и уровень их подготовки. Интересны задачи, которые можно решить сразу несколькими способами. Вот пример задачи, которую можно решить, как с помощью таблицы, так и с помощью графа: Катя, Аня и Лена купили три билета: в кино, на рок-концерт и в театр. Лена не увлекается громкой музыкой. Аня не любит рок-концерты, а от просмотра кинофильмов у нее быстро устают глаза. Куда отправилась каждая из девочек? [1]

## **Список литературы**

[1] Логические задачи / О. Б. Богомолова. - 4-е изд., испр. и доп. - М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2013. - 277 с.

# Использование дистанционных уроков в процессе обучения математике

Лахтина О. А.

МАОУ СОШ №40 г. Томска, ТГУ г. Томск

[lahtina@school-40.tomsk.ru](mailto:lahtina@school-40.tomsk.ru)

Различные формы дистанционного образования широко внедряются в школьную практику. Однако их эффективность еще не изучена. Цель данного исследования: выяснить, насколько успешно учащиеся 9-го класса осваивают тему, предложенную для дистанционного изучения, и как относятся к этому новому для себя опыту.

Был создан дистанционный курс на платформе [stepik.org](https://stepik.org), который включал в себя три урока на тему «Метод интервалов». После прохождения курса, ученикам была предложена анонимная анкета, ответы на которую показали нам недоработки курса.

К ним можно отнести: сложность тестов и теории различна, необходимо больше примеров и более подробная теория. Надо сказать, что осуществить это пожелание непросто, так как при этом возрастет объем дистанционных уроков. Трудность второго урока оказалась значительно выше, чем первого. Поэтому третий урок уже проходили не все учащиеся.

Что касается эффективности обучения с помощью тестовых заданий на нашем курсе, то она оказалась ниже, чем при очном обучении по классической методике (классная и домашняя работа). Это можно объяснить, прежде всего, отсутствием учителя при разборе учениками материала, недостатками тестов, а также недостаточной мотивацией учеников при изучении уроков дистанционно. Эти проблемы требуют серьезных исследований, как отмечено в [1].

Проведя это исследование, мы увидели, что ученики 9-го класса не вполне готовы к изучению нового математического материала в дистанционной форме. Не сформирована культура самостоятельной работы с дистанционным ресурсом, например, ведение записей в тетради. Однако из проведенного опроса следует, что школьникам интересна такая форма обучения и они готовы ее использовать в дальнейшем.

## Список литературы

[1] Конохова Г.П., Бритвина В.В. Применение технологии дистанционного обучения в преподавании математики и информатики: Монография. – Москва. Изд-во Прондо, 2017. - 115 с.

# Исследование сформированности навыка умножения у учащихся с ограниченными возможностями здоровья 7-9 классов

Новикова Н.В.

МБОУ ООШИ № 22 г. Томска, ТГУ, г. Томск

e-mail: [novnat013@gmail.ru](mailto:novnat013@gmail.ru)

Для исследования навыка умножения многозначных чисел на двузначное число у учащихся с ограниченными возможностями здоровья в 7–9 классах школы – интерната проведена проверочная работа, в которой одним из заданий являлись два примера:  $56981 \cdot 48$  и  $2435 \cdot 25$ . Цель работы: сравнение уровня сформированности вышеуказанного навыка у учащихся разных классов, в которых данная тема изучается в рамках адаптированной основной общеобразовательной программы для учащихся с умственной отсталостью (интеллектуальными нарушениями). Оценивание работы проводилось в баллах, как количественная оценка по правильности цифр в первом и втором неполном произведении, а также в полном произведении (в ответе). За каждую правильную цифру ставился 1 балл.

Для достижения цели предлагается использовать статистический критерий Манна – Уитни [1, 2] по количественно измеряемому уровню достижений учащихся. Нулевая гипотеза: уровень сформированности данного навыка в определенном классе совпадает с уровнем сформированности в другом классе.

Вместе с количественным оцениванием производится и качественное оценивание ошибок в двух седьмых, восьмом и двух девярых классах. Выяснилось, что учащиеся ошибаются при записи второго неполного произведения (записывают не под десятками), при сложении двух неполных произведений, а также переставляют цифры в множителях, неправильно списывая пример.

## Список литературы

- [1] Ликеш И., Ляга И. Основные таблицы математической статистики // М.: Финансы и статистика, 1985
- [2] Афанасьев В., Сивов М. Математическая статистика в педагогике // Ярославль, 2010

# Математические задачи на уроках географии

Нынь Е. А.

МАОУ СОШ № 43, ТГУ, г. Томск

e-mail: nynea8616@mail.ru

В учебниках по географии (см., например, [1]), как правило, отсутствует раздел «Задачи», хотя имеется обширный материал, который удобнее всего изучать и осмысливать, решая задачи географического содержания математическими методами. Целью данной работы является разработка и создание сборника географических задач, требующих математических знаний и навыков, с алгоритмами их решения. Сборник будет использоваться на уроках географии в основной школе, при подготовке к олимпиадам по географии, а также на занятиях элективного курса. Он поможет учащимся в формировании целостного представления о явлениях природы и взаимосвязи между ними, их связи с математикой, поэтому позволит сделать знания практически более значимыми и применимыми. С другой стороны, эти задачи можно использовать и при обучении математике [2]. В сборник планируется включить задания на такие темы, как: «Масштаб», «Ориентирование на местности. Азимут», «Высота солнца над горизонтом. Определение географических координат», «Местное и поясное время», «Численность населения» и др. Как показывает практика проведения уроков географии, эти темы вызывают затруднения у обучающихся, так как требуют не только чисто географических знаний, но и математических навыков, умения работать с численной информацией и чертежами, применять геометрические конструкции и теоремы. В докладе представлены базовые задачи на указанные темы, производится разбор необходимых географических понятий и математического содержания задач.

## Список литературы

- [1] Домогацких Е. М., Алексеевский Н. И., Клюев Н.Н. География. Москва: «Русское слово», 2015.
- [2] Тауткеева А.А. Использование в обучении математике межпредметных связей с географией // Актуальные проблемы современного образования. 2017. № 1 (22). С. 111-115.

# Использование комплексных чисел для решения тригонометрических уравнений

Плотников А.Н., Гришпон Я.С.

ТТВТС, Томск

e-mail: xnp@rambler.ru

При изучении комплексных чисел значительное место необходимо отводить вопросам их применения как в других разделах математики, так и в практической деятельности. Иначе имеется риск восприятия комплексных чисел учащимися как неких странных «мнимых» объектов, выдуманных непонятно зачем математиками.

Наиболее ярко роль комплексных чисел и пользу от их введения можно ощутить в тригонометрии и в электротехнике [1-2].

Цель работы – разработка курса занятий для студентов учреждений среднего профессионального образования по изучению комплексных чисел и их применению для решения тригонометрических уравнений и других задач.

Выделены основные разделы курса: необходимость расширения множества действительных чисел; введение комплексных чисел; геометрическая интерпретация комплексного числа; алгебраическая, тригонометрическая, экспоненциальная формы записи комплексного числа; алгебраические действия над комплексными числами и их свойства; формула Муавра; классический способ решения тригонометрических уравнений; решение тригонометрических уравнений с использованием комплексных чисел; использование комплексных чисел для получения АЧХ и ФЧХ пассивных электрических цепей.

## Список литературы

[1] Башмаков, М.И. Математика: учеб. для студ. учреждений сред. проф. образования/ М.И. Башмаков -5-е изд., стер. - М.: Издательский центр «Академия», 2018. – 256 с.

[2] Башмаков, М.И. Математика: Сборник задач профильной направленности: учеб. пособие для студ. учреждений сред. проф. образования/ М.И. Башмаков -2-е изд., стер. - М.: Издательский центр «Академия», 2018. – 208 с.

# **Изучение систем счисления в школьном курсе информатики с целью осознания учащимися методов обработки числовой информации в компьютере**

**Турганова Н.В.**

ТГУ, Томск

e-mail: sch-s25@mail.ru

Информатика, как наука, достаточно молода, но история чисел и работы с числовыми данными - древняя. Глубокое понимание методов обработки числовой информации невозможно без изучения систем счисления [1-2]. Вопросы по обработке числовой информации входят в ОГЭ и ЕГЭ по информатике, что определяет актуальность темы.

Цель работы: дать понятие о представлении числовой информации с помощью систем счисления.

Решаемые задачи: ознакомить учащихся с понятием числовой информации и способах ее представления; сформировать понятие системы счисления (позиционной и непозиционной), разряда, свернутой и развернутой записи числа; научить записывать числа в свернутой и развернутой форме; осуществлять перевод чисел в позиционных системах счисления; представлять числа в памяти компьютера; установить соответствия математических навыков и знаний учащихся требованиям школьного курса информатики и ИКТ.

Примеры заданий: непозиционные системы счисления (запись чисел римскими цифрами; выполнение арифметических операций в римской сс); позиционные системы счисления (определение основания сс по ее алфавиту; формирование алфавита сс по ее основанию; перевод чисел в десятичную сс; перевод чисел из десятичной сс в другие; связь между родственными системами счисления; выполнение арифметических операций в позиционных сс; представление целых и вещественных чисел в памяти РС; выполнение арифметических операций в компьютере.

## **Список литературы**

- [1] Е.С. Кутугина «Арифметические и логические основы построения компьютера». Учебное пособие, Томск 2007.
- [2] Елена Андреева, Ирина Фалина «Системы счисления и компьютерная арифметика». Учебное пособие. «Лаборатория Базовых Знаний», Москва, 2004.

# **Числа и наука-введение в теорию МНОЖЕСТВ**

**Хорошкова Е.В.**

ТГУ, Томск

e-mail: jane9876@yandex.ru

Множество – базисное понятие в математике [1-2]. По стандартам образования, выпускник школы должен обязательно владеть таким понятием, как множество и применять полученные знания в жизни. В учебной программе должного внимания этой теме не уделяется. Поэтому был создан курс для учеников 5-6 классов: “Числа и наука – введение в теорию множеств”, который в полной мере удовлетворяет современные стандарты в обучении математике.

Курс рассчитан на 34 часа. Результатом деятельности которого являются формирование метапредметных умений и успешные выступления на научных конференциях школьников с такими докладами, как: “Формулы включений-исключений в нашем классе”, “Отношения эквивалентности или как вылечить бабушку”, “Задачник на тему множество”.

## **Список литературы**

- [1] Виленкин Н. Я. Рассказы о множествах М.: МЦНМО, 2005. 150 с.
- [2] Лавров, И. А. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов / И.А. Лавров, Л.Л. Максимова. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. - 256 с.